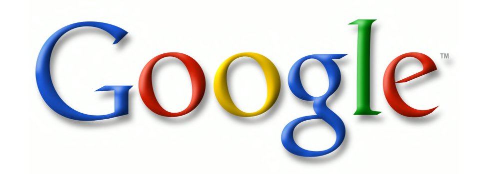

Google

ESSAI

SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

ESSAI

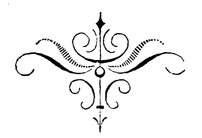
SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

J.-F. BONNEL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ IMPÉRIALE D'ÉDUCATION
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE IMPÉRIAL DE LYON
ETC., ETC., ETC.



PARIS
CH. DELAGRAVE ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
78, RUE DES ÉCOLES, 78

1870

ESSAI

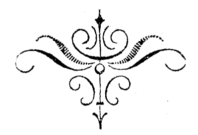
SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

J.-F. BONNEL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ D'ÉDUCATION
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE DE LYON
ETC., ETC., ETC.



PARIS
CH. DELAGRAVE ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
78, RUE DES ÉCOLES, 78

1871

PRÉFACE

Que des hommes puissent se tromper en matière de philosophie, que des savants ne soient pas d'accord sur l'essence des principaux agents de la nature, que des médecins ne s'entendent pas entre eux, il n'y a là rien qui vous étonne.

Mais quand il s'agit de mathématiques, les erreurs sont elles possibles ? Est-ce que deux et deux ne font pas quatre pour tout le monde ? Ce qui est démontré par A plus B est bel et bien démontré, sans que personne ait rien à y reprendre.

Sans doute, cher lecteur ; je suis de votre avis. Cependant les questions litigieuses abondent dans les mathématiques, comme dans toutes les sciences humaines ; je ne parle pas de la quadrature du cercle, ni de la trisection de l'angle, qui sont simplement des problèmes difficiles. Mais les questions relatives à l'infini mathématique sont à peine posées ; il y a tel

savant qui en a peur, et, parmi les autres, celui qu passe pour le plus fort est tout bonnement le plus habile à les esquiver. Et vous avez dû remarquer, en ouvrant un livre quelconque de mathématiques, cher lecteur, que l'infini se présente en personne, bon gré malgré, dans les premières propositions qui s'y trouvent formulées.

Cette rencontre inattendue de l'infini au début de la science suffit, je pense, à vous faire comprendre comment les erreurs y sont possibles. Vous le comprendrez encore mieux, si vous vous souvenez qu'on a introduit depuis nombre d'années des questions de méthode, d'histoire ou de critique parmi les épreuves sérieuses de l'agrégation des lycées pour les sciences mathématiques. Que si vous doutez après cela, je vous dirai, pour vous convaincre, que parmi les géomètres italiens la discorde vient d'éclater l'an passé, en discussions si vives que leur ministre à Florence s'est vu obligé de décider qu'un seul ouvrage de géométrie élémentaire serait à l'avenir autorisé dans les écoles du royaume, savoir : les *Eléments* d'Euclide. Et ce ministre, quoi qu'en aient dit messieurs les Anglais aurait pu faire un plus mauvais choix.

Le moyen de découvrir ces erreurs et de les éviter, c'est l'attention. Par le temps qui court, l'attention est une des qualités qui manquent le plus dans nos études classiques. Apprendre vite et surtout des choses qui soient utiles dans la vie pratique, voilà la devise de

beaucoup de gens de notre époque. Malheureusement, les deux termes de cette devise sont contradictoires; car, le moyen d'appliquer utilement des connaissances, c'est de les posséder à fond, et pour les posséder à fond, il faut les avoir acquises lentement. Les esprits médiocres ne peuvent évidemment retirer aucun avantage d'une éducation à la vapeur; et, si vous êtes intelligent, comme je le suppose, vous emporterez, malgré tout, du collége où le temps vous aura manqué, un tas d'erreurs dont vous tiendrez tôt ou tard à vous débarrasser; les heures de travail que vous emploierez à vous refaire l'esprit seront une perte de temps, qu'un enseignement plus sage et plus complet aurait pu vous épargner.

Je sais bien que la faute en est aussi imputable à la loi, qui assigne une limite d'âge pour l'admission aux écoles du gouvernement. Cette loi oblige maîtres et élèves à se presser : passé 20 ans, nul ne peut concourir pour l'Ecole Polytechnique, ni pour celle de St-Cyr, sauf une exception en faveur du soldat qui peut se présenter jusqu'à 25 ans.

Il est dificile de se rendre parfaitement compte de la nécessité actuelle d'une semblable mesure, et surtout de l'exception qu'elle comporte. Est-ce une qualité d'être jeune pour un ingénieur? Et cette qualité de jeunesse a-t-elle plus de prix lorsqu'il s'agit du génie civil que lorsqu'il s'agit du génie militaire? Il y a eu, sans doute, d'excellentes raisons à donner pour

le maintien de cette disposition de la loi; mais son origine, je le crains, se rattache à des circonstances exceptionnelles nées d'un régime qui n'existe plus, et les bonnes raisons qu'on a pu autrefois alléguer en sa faveur n'ont à présent, j'en suis convaincu, qu'une importance tout à fait secondaire.

Au lieu de tendre à abréger la durée de l'éducation scolaire, il est urgent de chercher à lui rendre sa plénitude normale et son complet développement. Si vous êtes ministre, retournez donc hardiment la règle, et qu'il soit défendu aux jeunes gens de concourir pour l'école Polytechnique avant d'avoir 20 ans; faites une exception, si l'on tient absolument à ce qu'il y en ait une, pour les candidats qui se destinent à la carrière militaire, et permettez leur (mais seulement à ceux-là) de se présenter à 18 ans.

Vous aurez trouvé ainsi le moyen de laisser parcourir librement à vos élèves les programmes officiels dans toute leur étendue et avec toute la maturité d'esprit désirable. Vous aurez le loisir de leur enseigner, à côté des langues vivantes, le grec et le latin sous toutes leurs formes; vous pourrez, soyez en sûr, abréger impunément la durée des classes, propager les exercices gymnastiques, et faire que le nombre des myopes et des morts n'augmente plus dans vos écoles.

J'ai souffert comme vous, cher lecteur, d'un mauvais état de choses tout fait que nous ont légué nos pères; j'ai mis des années à découvrir telle vérité que

je signale, dans ces pages, à votre attention, et c'est pour alléger votre tâche, autant que pour doubler vos chances de succès, que je me suis décidé à formuler, en règles simples et précises, les idées qui ont présidé à mes recherches.

Autant que possible, j'ai évité le *moi*, comme le recommande Pascal dans les questions de critique, et, si j'ai dû citer des ouvrages avec les noms d'auteur, on reconnaîtra, je l'espère, que c'est plus souvent pour louer que pour blâmer.

Malgré le soin que j'ai pris de ne blesser personne, plusieurs géomètres se croiront directement attaqués dans mon écrit. Qu'ils se rassurent; les erreurs que je relève dans leurs ouvrages et que je combats, ne sont pas nées d'hier. Mais il m'a paru complètement inutile d'aller leur déclarer la guerre dans les œuvres d'Aristote ou de Platon; c'est pourquoi je me suis attaché uniquement à la critique des auteurs modernes.

Au surplus, je ne vise pas haut. Je ne traite la question des définitions géométriques qu'au point de vue excessivement restreint de l'enseignement élémentaire, c'est-à-dire au point de vue de mon expérience personnelle et quotidienne. Ce n'est pas un nouveau traité de logique que je vous soumets, cher lecteur; c'est le sens commun de mes élèves que je vais laisser parler.

CHAPITRE I

Importance des définitions

L'étude de la géométrie occupe en France une si large place dans les programmes de l'Enseignement public, que son importance n'est aujourd'hui contestée par personne. Ce n'est pas, comme plusieurs pourraient le croire, que les vérités théoriques qu'elle propose soient très-utiles en elles-mêmes, ni que les résultats pratiques auxquelles ces vérités aboutissent, soient considérables. L'importance de la géométrie dans l'enseignement classique (1), consiste essentiellement en ce que cette science est, entre toutes les sciences humaines, la plus capable de conduire l'esprit de l'homme à la recherche et à l'amour de la vérité.

L'étude de la géométrie nous invite à la recherche de la vérité, car elle est un modèle parfait de toutes les règles de la logique, en tant qu'elle offre une application continuelle et facile, des lois du raisonnement.

L'étude de la géométrie nous inspire l'amour de la vérité, car elle habitue l'esprit qui s'y livre à se détacher

(1) Voy. les Prog. 3, 4. etc., du *Plan d'Etudes des Lycées*. 1868.

des choses sensibles, en l'appliquant à un objet qui est très-capable de l'occuper tout entier, et qui pourtant n'a rien qui puisse favoriser la pente de l'âme vers les sens.

Combien d'hommes seraient plus réservés dans leurs affirmations philosophiques et morales, s'ils savaient un peu plus de géométrie! Platon inscrivait sur la porte de son école : « Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre. » Et Pascal disait qu'entre deux écrivains on distingue toujours celui qui a de la géométrie. Leibnitz s'écrie aussi : « Sans les mathématiques, on ne pénètre point au fond de la philosophie; sans la philosophie, on ne pénètre point au fond des mathématiques; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien (1). On exigeait, il y a trente ans, que les candidats à l'agrégation de philosophie, fussent bacheliers ès-sciences, et on l'exige encore dorénavant (2); mais ce n'est pas assez. On devrait leur demander quelque chose de plus, et souhaiter que pas un philosophe présent ou futur, n'ait lu et relu vingt fois un traité complet d'algèbre et de géométrie, avant de se mettre à professer et à écrire. On ne verrait plus, comme dans ces dernières années, se produire effrontément, sous forme de définitions mathématiques, des principes de morale individuelle ou sociale, qui n'ont de géométrique que l'apparence et dont la naïveté égale l'outrecuidance.

Pour que l'étude de la géométrie conduise l'esprit d'un pas assuré au double but qui vient d'être indiqué, il ne suffit pas qu'elle contienne un ensemble plus ou moins parfait de vérités qui soient démontrées sans

(1) Voy. Leibnitz, *Nouveaux Essais sur l'Entend.*

(2) Voy. *Bulletin de l'Instruction publique*, n° 207, année 1869.

pétitions de principes, ni cercles vicieux : il ne suffit pas non plus que toutes les propositions, qui se rapportent au même objet, y soient groupées et ordonnées de façon à former des théories bien établies et bien distinctes. Il faut encore, pour que l'esprit puisse profiter autant que possible d'une semblable étude, que toutes les théories y soient enchaînées avec méthode et que cette méthode soit naturelle, c'est-à-dire que les théories les plus simples y soient présentées les premières, et que les plus compliquées trouvent leur place à la suite des premières, sans que, dans aucun cas, les démonstrations soient entachées de fautes contre le raisonnement.

Les vérités géométriques présentées dans un ordre naturel pénètrent aisément dans l'intelligence de l'homme ; en y pénétrant ainsi, elles y produisent peu à peu comme une lumière qui l'éclaire d'une vive clarté, et qui lui permet d'apercevoir sans aucune peine les vérités de détail et d'ensemble les plus difficiles à saisir ; sans compter qu'il est très-utile de s'habituer à ranger toujours ses pensées, quelles qu'elles soient, dans un ordre naturel.

« On peut dire même, avec Pascal, que ce qu'on a su une fois, pour en avoir pénétré la vraie raison, ne se retient pas par mémoire, mais par jugement, et que cela devient tellement propre qu'on ne peut l'oublier ; au lieu que ce qu'on ne sait que par des démonstrations qui ne sont point fondées sur des raisons naturelles, s'échappe aisément, et se retrouve difficilement quand il nous est une fois sorti de la mémoire, parce que notre esprit ne nous donne point de voie pour le retrouver (1). »

Cela explique, en partie, comment il se fait que des

(1) Voy. *Logique de Port-Royal*, 4e partie, chapitre x.

hommes ayant à peine quitté le collége, oublient totalement les vérités théoriques qu'ils y ont apprises, et pourquoi ces mêmes hommes, se retournant à certains moments contre l'Université, se prennent du désir subit d'en changer le régime de fond en comble, et d'y supprimer brusquement tout ce qui ne doit pas laisser de trace sensible dans la vie pratique. Certainement, l'enseignement n'est pas parfait dans le meilleur des colléges; mais tout homme impartial et éclairé, qui voudra s'en enquérir, sera obligé de reconnaître que, tel qu'il est organisé actuellement dans les lycées de France, l'enseignement classique est éminemment propre à développer ces connaissances générales, nécessaires, qui doivent former le fond de toute éducation sérieuse. A une condition, sans doute; à la condition que les études du lycée ne soient pas précipitées, écourtées, escamotées, comme cela arrive souvent, et qu'une année de vraie philosophie leur serve de couronnement.

Les souvenirs d'élève sont ici d'accord avec l'expérience du professeur. En effet, qui ne connaît ce mot d'un élève de l'Ecole polytechnique, aujourd'hui ingénieur des ponts-et-chaussées? Admis très-jeune à l'Ecole et dans un bon rang, il se maintenait dans sa position à force de travail et gémissait des avantages que la nature semblait avoir accordés, sous le rapport de l'esprit, à quelques-uns de ses camarades. « Ah! disait-il, je donnerais volontiers mon titre d'élève et mes deux années d'école, pour une année de philosophie! » Quel magnifique éloge de la philosophie du collége dans ces deux mots!

La première question à résoudre et la plus importante pour arriver à une méthode vraiment naturelle, dans

l'étude de la géométrie, est sans contredit celle des *définitions*. Une bonne définition est pour l'élève une sorte de principe auquel il peut recourir à chaque instant; c'est un flambeau qui lui permet de suivre un raisonnement dans tous ses détours. Si le principe n'est pas solide, si le flambeau l'éclaire mal, il tombe inévitablement dans l'erreur; et l'on ne saurait nier qu'il soit plus facile de raisonner juste sur un principe bien établi, que de reconnaître l'excellence de ce principe.

La mauvaise confection des définitions ou leur absence dans les leçons de géométrie, entretient d'ailleurs entre l'élève et le maître une sorte de mésintelligence, qui éclate presque toujours par des confusions étranges, ou par d'incroyables découragements. Avec un peu d'ordre logique et beaucoup de précision dans le choix des définitions, le professeur peut prévenir ces confusions, épargner ces découragements, même aux esprits mous et faibles, dont l'activité sommeille sur les bancs du lycée, et diminuer ainsi singulièrement le nombre des fruits secs de la science, qu'on rencontre encore dans les dernières années d'études classiques.

Sans doute, pour que l'œuvre de l'enseignement soit complète, pour que le triomphe du bien sur le mal soit complètement assuré, les leçons du maître, si raisonnable qu'il soit, ne suffisent pas; il faut qu'il s'établisse en même temps dans l'âme du jeune homme, un certain ordre moral qui aille en se perfectionnant jusqu'à la fin ; il faut que le développement du cœur marche parallèlement à celui de l'esprit. Ce développement du cœur est dû surtout à l'action de la famille ou de son représentant; c'est l'éducation proprement dite. L'éducation proprement dite est le complément nécessaire de l'enseignement; elle lui

vient en aide très-efficacement, sans pouvoir y suppléer, mais aussi sans que rien puisse la remplacer. Il serait à souhaiter que cette vérité fût bien entendue une fois pour toutes, et que chacun sût exactement la part de responsabilité qui lui revient dans la grande question de l'éducation française.

On s'est proposé particulièrement, dans cet Essai, de rechercher et de faire connaître, sous forme de règle, les qualités d'une bonne définition, tant générales que particulières, et d'appliquer cette règle aux principales définitions de la géométrie élémentaire. Ce n'est pas le dernier, mais le premier mot de la question, qu'on peut espérer d'y trouver ; car, il n'est pas douteux que d'autres géomètres pourront, avec autant de facilité et avec plus d'autorité, faire une application semblable de la même méthode aux diverses branches des mathémathiques.

Toutefois il importe, pour bien apprécier les qualités d'une définition géométrique, et pour se rendre parfaitement compte de l'étude élémentaire qu'on en fait ici, d'avoir présentes à l'esprit les notions mêmes de géométrie qu'on acquiert au collége. Ces notions se trouvent résumées dans le chapitre suivant, pour les personnes qui les auraient oubliées : il est clair que la plupart des lecteurs n'auront aucun besoin de jeter les yeux sur ce chapitre.

CHAPITRE II

Géométrie du Collége

La Géométrie du Collége se divise en deux parties : GÉOMÉTRIE PLANE et GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

La 1re partie a pour objet les propriétés de la ligne droite, du cercle, et, en général, celles des figures à deux dimensions. La 2e partie a pour objet les propriétés de quelques figures solides, c'est-à-dire à trois dimensions.

Au XVIIe siècle, on se contentait dans les colléges d'enseigner la 1re partie, c'est-à-dire la géométrie à deux dimensions, et on laissait aux élèves le soin d'étendre aux figures à trois dimensions les propositions démontrées dans la géométrie plane (1). Etait-ce suffisant pour décider les élèves d'alors à apprendre la géométrie dans l'espace? On aurait mauvaise grâce à en douter.

Aujourd'hui les deux parties de la géométrie sont dans l'enseignement classique ; seulement la première a été réduite à ce qui est strictement nécessaire pour étudier la seconde, et ce n'est pas un mal. Bien que toutes les

(1) Voy. *Géométrie de Port-Royal*. 40e vol. des œuvres d'Arnaud.

figures de la géométrie soient de pures abstractions, celles qui ont trois dimensions sont plus faciles à concevoir que les autres, puisqu'elles sont plus près de la réalité. L'étude de la géométrie dans l'espace est donc moins abstraite que celle de la géométrie plane ; d'où il résulte que le programme actuel de la géométrie élémentaire convient, pour l'enseignement, à beaucoup plus d'esprits que celui de Port-Royal, qui ne s'adressait qu'à un petit groupe d'élèves, complètement préparés d'ailleurs à ces leçons par de longues et fortes études antérieures. La géométrie, grâce à l'introduction de la 2e partie, s'est vulgarisée dans l'enseignement, au moins autant si ce n'est plus que toutes les autres sciences.

« Ce serait un travail intéressant pour l'histoire de la science, disait S.-F. Lacroix, en 1804, que de comparer successivement les traités élémentaires qui ont obtenu dans leur temps un succès marqué, et d'en tirer en quelque sorte la chronologie des propositions. On retrouverait ainsi l'origine de quelques propositions qui ont été oubliées pendant un certain temps, et qui ont reparu depuis comme nouvelles ; on apercevrait même quelquefois des pas rétrogrades, parce que la mode ou des circonstances particulières dans la position d'un auteur peuvent, jusqu'à un certain point, donner de la vogue à ses ouvrages, ou les condamner à l'obscurité : les éléments de géométrie fourniraient en ce genre des remarques piquantes. »

Ces remarques piquantes, que Lacroix indiquait en 1804, n'offriraient pas un médiocre intérêt aujourd'hui, l'excessive centralisation du gouvernement tendant de plus en plus à faire de Paris comme le cerveau de la France.

Résumons d'abord la géométrie plane, ainsi réduite au strict nécessaire qu'il faut apprendre pour étudier les figures à trois dimensions.

Géométrie plane.

La logique la plus élémentaire commande dans la géométrie plane deux grandes divisions : celle des *lignes* et celle des *surfaces*.

La première de ces divisions comprend, au point de vue élémentaire, trois *parties:*

1° *Propriétés de la ligne droite, des angles et des parallèles.*

2° *Propriétés de la circonférence du cercle et des figures formées par la rencontre d'une circonférence avec une ligne droite, avec un angle et avec des droites parallèles.*

3° *Propriétés des polygones considérés en eux-mêmes et dans leurs rapports avec le cercle.*

Cette subdivision en trois parties n'a pas toujours obtenu la faveur officielle des programmes; plusieurs tentatives ont été faites pour mener de front, et dès le début, l'étude de la ligne droite et celle du cercle (1). Heureusement ces tentatives ont échoué.

Sans doute, les propriétés élémentaires de la circonférence du cercle sont aussi simples que celles de la ligne droite, et elles peuvent se démontrer directement, c'est-à-dire indépendamment de celles de la ligne droite. Mais est-ce une raison suffisante pour placer au début de la

(1) Voy. *Program. officiels* de 1854, classe de logique.

science, et comme sur le même plan, l'étude de la circonférence qui, en définitive, est une ligne courbe, et celle de la ligne droite?

Ne semble-t-il pas résulter aussi de l'étude comparative de la ligne droite et du cercle, que l'une est essentielle à l'autre jusque dans les premières propositions de la géométrie, tandis qu'il n'en est rien? Qui ne sait que les propriétés élémentaires de la ligne droite, des angles et des parallèles, sont tout à fait indépendantes de celles du cercle? Il est donc naturel de commencer la géométrie par l'étude de la ligne droite, et on doit s'attacher à dégager cette étude, autant que possible, de toute considération étrangère de ligne courbe. C'est tout à fait contraire à la véritable méthode, dit l'auteur de la logique de Port-Royal, que de se servir du plus composé pour expliquer le plus simple.

Il faut reconnaître que les partisans de cette réforme ont eu une très-louable intention, celle de simplifier la théorie des angles, qui passe pour difficile. Mais on ne doit pas oublier qu'il n'y a aucune corrélation naturelle entre les propriétés des angles et celles des arcs interceptés par les côtés de ces angles. Lorsque, dès la première leçon, on limite un angle par un arc dans le sens où son étendue est indéfinie, comme l'avait proposé d'Alembert (1), on dispense l'élève de concevoir ce que c'est qu'un espace angulaire au delà de l'arc décrit du sommet comme centre; on se débarrasse ainsi immédiatement de la difficulté qu'on rencontre au début, cela est vrai. Mais quel est l'esprit qui a jamais trouvé une difficulté à concevoir, et à concevoir aussi bien que ceux qui le conçoi-

(1) Voy. d'Alembert. — *Encyclopédie du XVIIIe siècle.*

vent le mieux, ce que c'est qu'un espace indéfini compris entre le sommet d'un angle et les deux côtés de cet angle? S'il y a une difficulté pour quelqu'un, elle est tout entière dans l'idée même de la ligne droite, qu'on définit par deux de ses points, et qu'on suppose toujours prolongée indéfiniment dans un sens et dans l'autre (car il n'y a pas un professeur qui ne se hâte d'en compléter la définition par cette extension donnée au mot de ligne droite). C'est donc en quelque sorte une puérilité, après avoir ainsi défini et expliqué la ligne droite, que de vouloir restreindre la signification du mot *angle* à l'espace compris entre son sommet, ses côtés et un arc : la difficulté est dissimulée aux yeux de l'élève, mais elle n'est pas vaincue, car l'élève qui ne voit pas la difficulté n'a pu la comprendre.

Il est bon de remarquer, au contraire, que l'idée d'infini se présente tout d'abord et d'une manière nécessaire dans les trois premières théories élémentaires de la géométrie, sous la triple forme de ligne droite, d'espace angulaire et d'espace parallèle (1). « Je ne vois, comme disait Pascal, que des infinis de toutes parts. » Et vouloir que cette idée soit écartée ou disparaisse complètement des premiers éléments de la géométrie, c'est tenter l'impossible.

La seconde division de la géométrie plane comprend aussi trois parties, au point de vue élémentaire:

1° *Aire d'une figure polygonale.*

2° *Aire d'une figure circulaire.*

(1) Le terme d'*espace parallèle* était employé au XVIIe siècle dans l'enseignement classique, pour désigner l'espace compris entre deux droites parallèles ; ce mot a été abandonné depuis, sans qu'on sache pourquoi.



3° *Aire d'une figure mixtiligne, c'est-à-dire terminée de toutes parts par des lignes droites ou circulaires.*

Mais ces trois dernières parties peuvent aisément être réunies en une seule, comme étant, au point de vue purement élémentaire, moins considérables que les autres. On arrive ainsi à la division générale de la géométrie plane en *quatre parties* ou QUATRE LIVRES, division qui est très-ancienne et qui est à peu près identique avec celle des programmes officiels.

Cette division est naturelle, et doit être soigneusement conservée; tandis que toute division artificielle de la géométrie en LEÇONS ou par NUMÉROS, doit être sévèrement rejetée de l'enseignement classique (1).

Géométrie dans l'espace.

La géométrie dans l'espace comprend *trois parties* ou TROIS LIVRES :

1° *Propriétés du plan et de la ligne droite, des angles dièdres et des trièdres.*

2° *Propriétés des figures polyèdrales: prismes, pyramides, etc.*

3° *Propriétés des corps ronds: cylindre, cône et sphère.*

Cette division est conforme aux programmes officiels et à la nature des choses. Il y a trente ans, l'étude des propriétés de la sphère était assez développée dans les classes pour qu'on en fit UN LIVRE à part; il y avait ainsi HUIT LIVRES dans la géométrie du collége; aujourd'hui,

(1) Voy. Les *Programmes officiels* du plan d'études en 1854, et toutes les géométries malheureusement conformes à ces programmes.

grâce à la simplification de l'étude de la sphère, il y a un livre de moins, et l'on n'a plus en tout que SEPT LIVRES de géométrie à apprendre au collége.

Quant à l'ordre qu'il convient de suivre dans la subdivision de ces SEPT LIVRES de géométrie, on devra préférer celui qui permettra de conserver la plus complète analogie, non-seulement dans la succession des propositions et de leurs énoncés, mais encore dans les démonstrations mêmes de ces propositions. Il est aisé de s'assurer que la disposition la plus favorable à ce développement est à peu près celle qui est adoptée dans les derniers programmes ministériels, et il serait au moins superflu d'exiger d'eux une exactitude parfaite sous ce rapport la question est sans importance.

Il n'en est pas de même des définitions géométriques; leur perfection semble bien autrement importante que celle des détails et de la forme des différentes parties du cours de géométrie. Mais le programme officiel est très-sobre de définitions; à peine en trouve-t-on par-ci par-là une demi-douzaine. Ce n'est pas que le programme ait pensé, on se l'imagine bien, qu'on puisse s'en passer, ni le moins du monde les négliger; mais il a voulu que chaque professeur prît le soin de faire et de choisir ses définitions. Le programme s'est comporté en sage, voilà tout.

CHAPITRE III

Ce que c'est qu'une définition géométrique

On distingue, en logique, deux sortes de définitions : les *définitions de choses* et les *définitions de noms* (1).

Dans une *définition de chose*, on laisse au terme qu'on définit son idée générale ordinaire, et on affirme que dans cette idée sont contenues d'autres idées. Exemple : *l'homme est un animal raisonnable*. Voilà une définition de chose ; car, tout en laissant au mot *homme* son idée générale ordinaire, on affirme que dans cette idée générale est contenue une autre idée, celle *d'un animal raisonnable*. Il peut se faire, bien entendu, que d'autres idées soient encore contenues dans celle d'*homme*.

Une définition de chose n'est pas arbitraire, attendu qu'il ne dépend pas de vous ni de moi que telle ou telle idée soit contenue dans celle qui s'attache ordinairement à telle ou telle expression. Une définition de chose peut être contestée, car ce n'est rien autre qu'une véritable proposition dont l'exactitude peut être évidente comme celle d'un axiome, mais qui peut aussi n'être vraie qu'à la condition d'être démontrée rigoureusement.

Dans une *définition de nom*, on n'a en vue que de faire

(1) Voy. *Pensées de Pascal. — De l'Esprit géométrique.*

savoir que tel terme sera dorénavant le signe de telle idée, qu'on avait jusque-là l'habitude d'exprimer par plusieurs autres termes, ce qui est une économie de mots très-précieuse dans le langage : c'est ainsi qu'on est convenu de désigner, en géométrie, par le mot *polygone*, une figure formée de plusieurs lignes droites qui se coupent deux à deux ; par le terme de *parallélogramme*, un polygone de quatre côtés qui sont deux à deux parallèles ; par celui de *carré*, un parallélogramme qui a un angle droit compris entre des côtés égaux.

Les définitions de noms sont arbitraires, attendu qu'il est permis de donner à un mot la signification qu'on veut, pourvu qu'on vous en prévienne et qu'on lui conserve cette signification dans le même discours : par conséquent, il n'y a pas lieu de contester à quelqu'un le droit de choisir telle ou telle définition, s'il s'agit d'une définition de nom.

Mais il ne faut pas non plus les confondre avec les *définitions de mots* proprement dites, qu'on trouve dans les dictionnaires et qui ont pour but de faire connaître la signification vulgaire, c'est-à-dire la plus usitée des mots de la langue. Ces définitions de mots ne sont que des explications, dans lesquelles l'auteur n'a d'autre tâche à remplir que d'indiquer l'acception la plus ordinaire avec les différentes acceptions particulières d'un mot, mais non pas les siennes propres.

La distinction qui vient d'être faite de deux sortes de définitions est très-importante ; elle est d'ailleurs très-radicale. Une définition de nom n'a jamais pour objet, comme plusieurs paraissent le croire, de ramener une notion quelconque à d'autres plus simples, en la décomposant en quelque sorte dans ses divers éléments ; au

contraire, le but unique d'une définition de nom doit être de réunir, sous un seul terme, plusieurs idées distinctes et séparées jusque-là, en vue de les introduire plus commodément dans le discours et de les pouvoir combiner sans peine avec d'autres idées nouvelles. Toute formule d'une définition de nom suppose donc une opération de l'esprit dirigée en sens inverse de celle qui le conduit à une définition de chose.

Dans le premier cas, l'esprit rapproche et groupe des idées à l'aide d'une véritable synthèse, et en fixe le résultat acquis par un mot; c'est la définition de nom. Dans le second cas, il décompose une idée générale en plusieurs autres et se livre à une sorte d'analyse; c'est la définition de chose. Mais il est clair que celui qui se propose de décomposer une idée n'est pas maître d'en faire sortir autre chose que ce qui y est contenu; tandis que celui qui rapproche plusieurs idées, dispose évidemment, jusqu'à un certain point, du choix, de l'arrangement de ces idées et surtout de l'expression qu'il adopte pour formuler le résultat de sa combinaison. Et l'on peut dire, en définitive, que les définitions de nom sont toutes personnelles, arbitraires et incontestables, et qu'il n'en est absolument rien pour les définitions de chose.

Les définitions de la géométrie sont toutes des définitions de nom, telles qu'on vient de les expliquer, c'est-à-dire, grammaticalement parlant, des termes conventionnels par lesquels le géomètre se propose de remplacer, dans le discours, des périphrases plus ou moins longues. Il n'y en a pas une seule qui soit une définition de chose; d'où il résulte cette conséquence que la plus grande latitude doit être accordée au géomètre dans le choix et dans l'usage des définitions.

CHAPITRE IV

Qualités d'une définition géométrique

Bien que les définitions géométriques soient des définitions de noms, elles doivent satisfaire, pour être bonnes et acceptables, à certaines conditions générales qui conviennent à toutes les définitions de noms et qui sont assez évidentes pour que personne ait jamais songé à les contester.

PREMIÈREMENT, il y a dans toutes les langues un certain nombre de mots dont la signification est parfaitement connue, et dont il est permis de se servir comme représentant universellement des idées simples, c'est-à-dire des idées susceptibles d'entrer sans aucune explication préalable dans une combinaison d'idées. C'est un appel au sentiment général de l'évidence.

SECONDEMENT, une définition ne doit renfermer que des termes parfaitement connus ou déjà définis, de telle sorte qu'elle deviendrait une proposition évidente pour l'esprit le moins clairvoyant du monde, si l'on remplaçait tous les termes qu'on y emploie par ce qu'ils signifient, c'est-à dire par leur définition.

Troisièmement, il n'est pas permis de changer les définitions consacrées par l'usage, quand on n'y trouve rien à redire et que ce changement n'a d'autre motif que le bon plaisir.

Quatrièmement, quand on est obligé de créer une nouvelle définition, il faut faire en sorte que le terme qu'on y applique ait, autant que possible, une signification conforme à l'idée générale que tout le monde en a, c'est-à-dire à son étymologie.

Il est clair que si tout le monde connaissait la signification exacte des mots techniques usités dans une science, toutes les définitions de nom qu'elle contient deviendraient de simples définitions de mots, et, grâce aux dictionnaires, seraient inutiles à rapporter dans les ouvrages. Quant aux définitions de chose, elles seraient à supprimer aussi comme étant de véritables propositions, et le chapitre des définitions ne serait pas long. La nécessité des définitions provient donc uniquement de notre ignorance, et cette nécessité subsistera tant qu'il y aura des hommes à instruire.

Les définitions géométriques doivent aussi posséder deux qualités particulières, qui ne sont pas moins nécessaires que les qualités générales indiquées plus haut, mais qui sont peut-être moins évidentes, et que, pour cette raison, il est utile d'expliquer. Autrefois ces conditions particulières se trouvaient exprimées, dans l'école, par cette formule qu'une définition *doit convenir au défini et rien qu'au défini :* c'est cette formule que nous allons préciser en la développant.

La première qualité particulière et essentielle d'une définition géométrique est que la figure, qui doit être définie, soit une figure *possible*. C'est ainsi qu'il ne serait

pas permis d'appeler *parallélogramme* un polygone de quatre côtés qui sont deux à deux parallèles, s'il n'était d'ailleurs reconnu et démontré qu'une semblable figure est possible. C'est ainsi qu'avant de définir la perpendiculaire, on commencera par démontrer qu'*on peut mener par un point d'une droite une autre droite faisant avec la première deux angles adjacents égaux*. Or, pour démontrer qu'une construction est possible, il suffit d'indiquer un moyen de l'exécuter, quelque soit d'ailleurs ce moyen ; par conséquent, il suffit d'imaginer qu'une seconde droite, d'abord couchée sur la première, s'en écarte en tournant autour d'un point commun aux deux droites, et en faisant, d'un côté, un angle qui va en augmentant, de l'autre côté, un angle qui va en diminuant. Si le mouvement de la droite qui tourne se prolonge suffisamment, il arrive que le plus grand des deux angles devient le plus petit et inversement; donc, il y a une position de cette droite pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux, ce qui caractérise précisément la perpendiculaire.

Ce que nous rencontrons ici se présente dans toutes les définitions de la géométrie. Il n'y en a pas une, si simple qu'elle paraisse, qui ne suppose déjà une proposition antérieurement démontrée ou évidente par elle-même. Dans les premières propositions on n'y prend pas garde, soit parce que les premières notions de la géométrie sont familières à tout le monde, soit parce que la possibilité de construire les figures définies est évidente ; mais, lorsqu'on a fait quelques pas dans cette étude et surtout lorsqu'on aborde les propriétés des figures dans l'espace, il n'en est plus de même, et il devient indispensable de justifier chaque définition par une proposition

immédiate, si elle ne l'est déjà par quelqu'une des propositions qui précèdent. Ainsi, pour n'en citer qu'un exemple, si l'on définit deux triangles semblables, ceux qui, ayant leurs angles égaux chacun à chacun, ont en outre leurs côtés homologues proportionnels, il est indispensable de démontrer que deux figures pareilles peuvent exister, avant que d'en étudier les propriétés. C'est ce qui résulte de la proposition suivante : *si l'on coupe un triangle quelconque par une droite parallèle à l'un de ses côtés, on forme ainsi un autre triangle qui est semblable au premier*. Toute définition géométrique suppose donc, pour sa justification, une proposition antérieure.

Il faut distinguer soigneusement dans la géométrie ces sortes de propositions FONDAMENTALES, qui n'ont pas précisément le même objet que les autres et qui servent de base aux définitions ; il faut qu'elles soient placées immédiatement avant la définition qui en est la conséquence, ou qu'il soit bien entendu, si on les place après, que c'est par une pure économie de langage. Aussi doit-on blâmer formellement l'usage, très-répandu du reste, de placer toutes les définitions d'un Livre ou d'un Chapitre, au commencement du livre ou du chapitre, et, en quelque sorte, en dehors de toute justification. Ces définitions ainsi posées d'avance, sont pour l'élève autant d'énigmes, et il n'y a rien que l'on puisse invoquer en faveur de cet usage, si ce n'est peut-être quelques considérations typographiques.

La seconde qualité particulière que doit avoir une définition géométrique, c'est que la figure définie soit *unique*, c'est-à-dire que la définition donnée ne puisse pas convenir à plusieurs figures différentes. Mais s'il suffit, pour démontrer qu'une figure définie est possible, d'indiquer un moyen de l'exécuter, quel que soit d'ailleurs ce moyen,

il ne suffit pas, pour démontrer qu'une figure définie est unique, de faire voir que le moyen employé pour exécuter cette figure, n'en donne qu'une effectivement. Il faut, en outre, ou bien démontrer qu'il n'y a pas d'autre moyen à employer pour construire la figure, ou bien prouver que tous les autres, s'il y en a d'autres, reviennent à celui qu'on a employé. Ce n'est qu'à cette condition qu'on aura acquis la certitude que la définition ne peut pas convenir à plusieurs figures différentes, ou, en d'autres termes, que la figure définie est unique. Or, cette condition est évidemment remplie, si l'on parvient à établir, d'une manière indépendante du mode de construction qu'on a employé, qu'il n'y a qu'une seule figure à laquelle puisse s'appliquer la définition.

Ainsi, pour démontrer qu'*on ne peut élever en un point d'une droite qu'une seule perpendiculaire à cette droite,* il ne suffit pas de démontrer que, par le mode même de génération qu'on emploie, il n'y a qu'une position de la droite mobile pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux : il faut abandonner l'idée de mouvement qui a servi à prouver l'existence d'une perpendiculaire, car il ne doit pas en rester de trace dans la démonstration de cette seconde partie de la proposition, et la question doit se poser ainsi : *démontrer que par un point situé sur une droite on ne peut lui élever,* quel que soit le moyen qu'on emploie, *qu'une seule perpendiculaire.* Ou bien, comme la considération du mouvement qui donne la perpendiculaire, dans le cas dont il s'agit, peut donner en même temps toutes les droites qui partent du même point, quelle que soit leur inclinaison, on pourra remarquer que tous les moyens propres à élever une perpendiculaire en un point d'une droite, reviennent au même, par la consi-

dération du mouvement de rotation; et il suffira alors, mais seulement après cette remarque, de dire qu'il n'y a qu'une seule position de la droite en mouvement dans laquelle les deux angles adjacents soient égaux, pour qu'on soit en droit de conclure, que, par un point d'une droite, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite. Mais il est plus facile, à coup sûr, de rendre la démonstration tout à fait indépendante du mouvement qui a servi à établir l'existence de la perpendiculaire.

Ce qui précède se trouve mis en lumière d'une manière remarquable, à l'occasion d'une proposition bien connue de la GÉOMÉTRIE PLANE. On démontre en effet, dans la théorie des parallèles, que, *par un point situé hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite*, en construisant successivement deux perpendiculaires. Ce moyen de mener une parallèle à une droite, par un point situé hors de la droite, ne peut donner qu'une parallèle passant par ce point; il est aisé de s'en convaincre. Mais il ne s'ensuit pas qu'on ne puisse mener par le même point aucune autre parallèle à la même droite, si l'on vient à adopter une autre procédé pour la construction de cette parallèle. Il reste donc à démontrer, *d'une manière indépendante du mode de construction qu'on a employé*, que, par un point situé hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite. C'est cette seconde partie de la proposition qui constitue le POSTULATUM des programmes officiels.

Il existe, au contraire, une proposition analogue dans la GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE, qu'on peut démontrer sans le secours d'aucun postulatum ; cette proposition est ainsi conçue : *par un point donné, on peut mener un plan parallèle à un autre plan, et l'on n'en peut mener qu'un*. Il suffit

de remarquer que par le point donné on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire au plan, et que, par le point donné, on ne peut élever qu'un seul plan perpendiculaire à la droite déjà menée. Comme il a été démontré d'ailleurs, que tout plan, parallèle au plan considéré et passant par le point donné, doit être perpendiculaire à la droite qu'on a menée, il en résulte qu'on peut conclure à l'impossibilité de mener, par le point donné et quel que soit le moyen qu'on emploie, plus d'un plan parallèle au plan considéré.

Dans toutes les branches des mathématiques, la remarque précédente est susceptible d'une application rigoureuse. On rencontre, au début de l'arithmétique, cette proposition : *toute fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est réduite à sa plus simple expression, c'est-à-dire est irréductible*. Cette proposition est-elle évidente? Elle le serait, si l'on pouvait démontrer auparavant qu'il n'y a qu'un seul moyen de simplifier une fraction, savoir de diviser ses deux termes par un même nombre. Mais, il y a un autre moyen bien connu de simplifier une fraction, et qui consiste à retrancher de chaque terme un nombre convenablement choisi ; par conséquent, il est indispensable de démontrer ici, que toute fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, est irréductible, *quel que soit le moyen qu'on emploie*, c'est-à-dire indépendamment de toute espèce de procédé de simplification. Cela ne fait de doute pour personne.

De même, pour démontrer qu'on peut convertir en décimale une fraction ordinaire, lorsque son dénominateur satisfait à certaines conditions, il suffit de faire voir qu'en appliquant le procédé ordinaire de la division à ses

deux termes, l'opération réussit; mais, si l'on veut prouver qu'une fraction ordinaire irréductible ne peut pas être convertie en décimale, lorsque son dénominateur ne satisfait pas aux mêmes conditions, il ne suffit pas de faire voir qu'en appliquant le procédé ordinaire de la division à ses deux termes, l'opération ne réussit pas. Il faut quelque chose de plus; il faut absolument démontrer de ces deux choses l'une : ou bien que tous les procédés possibles reviennent au procédé ordinaire de la division, ou bien que la chose est impossible, quel que soit le procédé qu'on emploie. C'est cette dernière proposition qui se trouve habituellement établie sous la formule suivante :

Pour que deux nombres soient divisibles l'un par l'autre, il faut et il suffit que chacun des facteurs premiers du diviseur se trouve dans le dividende avec un exposant au moins égal à celui qu'il a dans le diviseur.

Les deux qualités particulières qui doivent distinguer toutes les définitions géométriques, et qui sont développées ci-dessus, sont *nécessaires*, c'est-à-dire qu'une définition doit être rejetée, si elle ne remplit pas l'une et l'autre de ces conditions, absolument comme un théorème dont la démonstration n'est pas complète. Il faut ajouter que ces deux qualités particulières sont *suffisantes*, en ce sens qu'une définition qui les possède, si elle satisfait en outre aux conditions générales de toute définition de nom, est nécessairement bonne et acceptable.

On ne comprendrait pas, vu la nature même des définitions mathématiques, qu'on pût exiger, dans leur formation, d'autres conditions que celles qui ont été spécifiées plus haut comme particulières ou comme générales.

Sans doute, on voit bien que les définitions qui possèdent les deux qualités particulières, sans avoir toutes les qualités générales, peuvent être regardées comme rigoureuses, sinon comme parfaites ; mais, il est manifeste aussi que la meilleure entre toutes sera évidemment celle qui, avec les deux qualités particulières, possèdera les qualités générales en plus grand nombre et au plus haut degré.

Rien ne serait plus facile même que de faire une classification complète des mauvaises définitions et de formuler, à leur suite, des règles correspondantes qui permissent de les éviter. Mais Condillac l'a dit : « Les règles sont comme les garde-fous qu'on met sur les ponts ; ce ne sont pas eux qui font marcher les voyageurs, seulement ils les empêchent de tomber. »

C'est pourquoi nous nous garderons de mettre le lecteur continuellement en présence du tableau des mauvaises définitions ; nous l'inviterons, au contraire, le plus souvent possible, à contempler dans son ensemble et dans ses détails l'image des qualités d'une bonne définition. Cette contemplation du vrai sera pour lui agréable en même temps qu'utile ; elle lui donnera le moyen, non-seulement de se défendre contre l'erreur, mais encore de la poursuivre et de la vaincre, dans toutes les sciences où la méthode géométrique est applicable.



CHAPITRE V

Double erreur des Géomètres

D'après ce qui est exposé dans le chapitre précédent, on voit comment tombe d'elle-même l'erreur des géomètres qui soutiennent que les définitions n'ont pas besoin d'être démontrées. On lit, en effet, dans un récent traité d'Algèbre : « Il serait absurde de chercher à démontrer les formules (1) et (2); les définitions ne se démontrent pas. »

Une pareille assertion est fausse.

Pour qu'une définition soit bonne et acceptable, il *faut* avoir démontré que cette définition est possible et unique, à moins qu'elle ne le soit évidemment (chap. IV). Une convention géométrique ou algébrique, qui est posée à priori et que rien ne justifie, sauf la fantaisie de son auteur, ne peut avoir aucune valeur logique; elle ne saurait être sérieusement d'aucun usage dans le raisonnement. Au contraire, si une convention est justifiée par ce qui précède ou par ce qui suit, cette convention devient alors une véritable définition géométrique, et c'est cette justification même, médiate ou immédiate, qui en forme la

démonstration. Mais, cette démonstration ne laisse pas que d'être nécessaire, et l'on doit regarder comme une erreur de croire que les définitions ne se démontrent pas. Il n'y a que celles qui sont évidentes par elles-mêmes qui puissent échapper à toute démonstration.

Une erreur semblable, mais dans un sens opposé, a conduit certains géomètres à ne vouloir admettre dans une définition aucune condition superflue. Ces géomètres prétendent appuyer leur opinion sur ce que *toute définition doit convenir au défini et rien qu'au défini*. Partant de là, disent-ils, une définition doit être telle que la figure définie soit complètement déterminée et rien de plus; donc, toutes les conditions qui ne sont pas essentielles à sa complète détermination sont superflues et doivent être bannies de la définition. Cette prétention exagérée est une erreur, qui a sa source dans une mauvaise interprétation du principe que la définition doit convenir au défini et rien qu'au défini. Nous avons examiné plus haut (chap. IV) ce qu'on doit entendre par ce principe de logique, et nous avons reconnu que les seules qualités particulières que doit posséder une bonne définition géométrique, sont : 1° que la figure définie soit possible; 2° que cette figure soit unique. Le nombre des conditions qu'il est permis de faire entrer dans la définition d'une figure demeure donc absolument arbitraire; rien ne s'oppose à ce que le nombre de ces conditions soit très-grand, et même aussi grand qu'on voudra. Citons un exemple, pour éviter de rester dans le vague des généralités.

Beaucoup d'auteurs définissent les *triangles semblables*, en disant que ce sont ceux qui ont *les angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels*. Quel-

ques-uns faisant remarquer que, si deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues sont nécessairement proportionnels, ont crû bien faire que de définir les triangles semblables ceux qui ont *leurs angles égaux chacun à chacun*. D'autres, se fondant sur la remarque inverse et écartant la considération des angles, définissent deux triangles semblables à ceux qui ont *les trois côtés proportionnels*. Les uns font ainsi entrer *trois* conditions dans la définition des triangles semblables, les autres *deux* seulement; et il y a ainsi, dans la première définition que nous avons citée, *deux* ou *trois* conditions superflues (1).

Mais, au point de vue de la rigueur, il suffit qu'un auteur justifie sa définition par une proposition fondamentale immédiate, si elle ne l'est déjà par une proposition antérieure, démontrée ou évidente, pour qu'il soit en droit de la choisir comme il lui plaît. On peut donc adopter, en toute rigueur, l'une ou l'autre de ces trois définitions : seulement, la première et la dernière exigeront pour leur justification un théorème spécial; quant à la deuxième, elle n'en exigera pas, parce qu'on a déjà eu l'occasion de rencontrer des triangles ayant leurs angles égaux chacun à chacun; mais, dans la théorie des triangles semblables qui découlera de cette définition, il n'y aura pas pour cela une proposition de moins à démontrer; le nombre des propositions reste le même, quelle que soit la définition qu'on adopte; l'énoncé et l'ordre des propositions seuls sont changés.

(1) Une *condition* se traduit ordinairement en géométrie par une *égalité*, et on estime le nombre des conditions, dans un énoncé, par celui des égalités qui y sont exprimées.

Il faut remarquer toutefois que, si l'on est en droit de choisir celle qu'on veut de ces trois définitions, puisque toutes les trois possèdent les qualités particulières essentielles d'une bonne définition géométrique, il y a lieu de préférer la première aux deux autres, comme remplissant mieux les conditions générales auxquelles doivent satisfaire toutes les définitions de noms. L'idée de *similitude*, quand il s'agit de deux objets quelconques, ne porte pas plutôt sur les angles que sur les côtés de ces objets, mais bien sur l'ensemble de toutes les parties qui les composent : c'est ainsi qu'il est naturel, dans la définition géométrique de deux triangles semblables, d'envisager à la fois les angles et les côtés, sans écarter la considération des uns ni celle des autres. La première des trois définitions citées plus haut, précisément parce qu'elle comporte un plus grand nombre de conditions géométriques, est donc préférable à toute autre, en ce sens que la signification qu'elle attache au mot *semblable* est plus conforme à l'idée générale que tout le monde possède de la similitude, c'est-à-dire à son étymologie.

Le choix de cette définition entraîne forcément une grande analogie entre la théorie de l'égalité géométrique des triangles et celle de leur similitude : or, cette analogie doit être maintenue; car elle est naturelle, et les trois cas de similitude doivent correspondre exactement aux trois cas d'égalité. Il est presque inutile d'ailleurs de faire observer que la propriété des triangles, à côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, n'est qu'un simple corollaire d'un des trois cas de similitude.

Enfin, si l'on était obligé de n'introduire dans la définition d'une figure aucune autre condition que celles qui

suffisent à la compléte détermination de cette figure, on serait souvent conduit à des conséquences singulières. Il faudrait modifier la définition d'un polygone régulier, celles du prisme, du parallélipipède, etc., car chacune de ces définitions contient beaucoup de conditions superflues; il faudrait abandonner la définition ordinaire de l'égalité de deux triangles, car il suffit que deux triangles aient un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, pour qu'ils soient superposables. Il en serait de même de l'égalité de deux figures quelconques, et enfin d'un très-grand nombre de définitions de la géométrie plane ou dans l'espace, que jamais personne n'a songé à critiquer, parce qu'elles sont, au point de vue de la logique, complétement satisfaisantes; il suffit, en effet, qu'une définition géométrique possède les deux qualités essentielles que nous avons fait connaître, si elle satisfait d'ailleurs aux conditions générales de toutes les définitions de noms, pour qu'elle soit bonne et acceptable.

CHAPITRE VI

Définitions artificielles

Il y a tout une classe de définitions qui sont nées de l'erreur signalée dans le chapitre précédent, et que l'on peut, à justre titre, qualifier de *définitions artificielles*. Elles se distinguent toujours par l'absence de quelque condition naturelle, et par conséquent essentielle, ou par la présence de quelque condition qui n'est point du tout naturelle, et qui, par suite, doit être rejetée.

Les définitions artificielles ne peuvent engendrer que des simplifications apparentes et sont très-difficiles à loger au fond de l'intelligence des élèves; au contraire, une définition bien faite, outre qu'elle se retient et se retrouve aisément, conduit toujours l'esprit qui raisonne, par les voies les plus simples, à la découverte de la vérité ; car, ce n'est qu'en ayant sans cesse devant les yeux l'ordre logique des idées qu'on parvient à formuler une définition vraiment naturelle.

Qui n'a pas eu entre les mains ce manuel du baccalauréat dont l'auteur, désireux d'abréger la théorie des parallèles, définit deux droites parallèles *celles qui en ren-*

contrent une troisième en faisant avec elle des angles correspondants égaux? Sans doute, il lui est aisé de tirer comme conséquence de sa définition l'égalité des angles alternes internes, alternes externes, etc. Mais, il oublie qu'il est tenu par la logique de justifier sa définition, et cette justification exige la démonstration préalable d'un théorème équivalent à celui qu'il veut éviter, savoir : *si deux droites font avec une troisième des angles correspondants égaux, les angles correspondants qu'elles forment avec toute autre droite sont aussi égaux.* La difficulté, que l'auteur du manuel a voulu tourner, reste donc entière; elle est seulement cachée aux yeux du lecteur inattentif ou trop peu clairvoyant, et la simplification qui en résulte n'est qu'apparente.

On ne saurait trop tenir son esprit en garde contre le désir de pareilles simplifications, qui ne sont qu'illusoires; ce sont de véritables erreurs, dont il est plus difficile de se garantir qu'on se l'imagine. Les programmes officiels ont introduit dans l'enseignement, il y a 15 ou 16 ans, un nouvel énoncé du théorème des parallèles rencontrées par une sécante; cet énoncé a été presque universellement adopté parce qu'il semblait plus simple que l'énoncé classique de Legendre, composé de cinq parties. Le voici tel qu'il figure encore dans les programmes d'admission à l'école Polytechnique : *lorsque deux droites parallèles sont rencontrées par une sécante, les quatre angles aigus qui en résultent sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus* (1). Ce théorème est vrai; mais la réciproque en est fausse, à moins qu'on ne dissèque cette réciproque en cinq morceaux. Cependant, on trouve dans un

(1) Voy. *Plan d'études des Lycées*. Classe de mathém. spéciales.

traité récent et très à la mode, l'énoncé textuel de cette réciproque avec une démonstration au bout; l'auteur du changement d'énoncé n'avait certes pas l'intention d'imposer une erreur aux adeptes des programmes officiels.

Un exemple très-remarquable de définition artificielle, c'est la définition des polyèdres semblables donnée par Legendre dans sa XV[e] édition. Legendre définit d'abord les tétraèdres semblables *ceux qui ont deux faces semblables chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées entre elles;* il dit ensuite, comme définition, que deux polyèdres sont semblables, *lorsqu'ayant des bases semblables, les sommets des angles solides hors de ces bases sont déterminés par des tétraèdres semblables chacun à chacun* (1).

De cette double définition, il tire relativement aux polyèdres les deux théorèmes suivants :

1° *Deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables et les angles solides homologues égaux* ;

2° *Deux polyèdres semblables peuvent se partager en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune et semblablement placées.*

On ne peut rien objecter à cette théorie sous le rapport de la rigueur. La définition des tétraèdes semblables n'a pas besoin de justification nouvelle ; puisqu'on a appris, dans la géométrie plane, à construire sur une droite donnée un triangle semblable à un triangle donné, on pourra évidemment en construire deux dans des plans différents et ayant entre eux une inclinaison donnée. Celle des polyèdres semblables n'en a pas besoin non plus, car on peut toujours sur un triangle semblable à un triangle

(1) Voy. Legendre, *Eléments de Géométrie*, liv. VI, définit. et suiv.

donné construire un, deux, trois tétraèdres respectivement semblables à des tétraèdes donnés.

Mais, au point de vue de la logique, on ne saurait approuver ni l'une ni l'autre de ces définitions : premièrement, l'idée générale que tout le monde se fait de la similitude de deux tétraèdres n'est point celle qui est réveillée dans l'esprit par la définition précédente, et l'on ne saurait regarder comme naturel de faire entrer, dans la définition de deux solides semblables, des conditions portant exclusivement sur un angle et deux de leurs faces, plutôt que sur les autres angles et les autres faces. Quant à la définition des polyèdres semblables, elle est entachée du même défaut et au même degré. Ces deux définitions sont donc purement artificielles, et doivent être remplacées par celles qu'on trouve dans les programmes officiels, et qui ne sont que l'extension des définitions analogues données dans la théorie des triangles et polygones semblables (1).

D'ailleurs, ces définitions choisies par Legendre, et auxquelles quelques personnes tiennent beaucoup, ne simplifient rien. L'auteur est obligé de démontrer, sous forme de proposition, que deux polyèdres semblables ont leurs faces semblables chacune à chacune et leurs angles solides homologues égaux ; et la démonstration de cette proposition, dans la théorie de Legendre, n'est ni plus courte, ni plus élégante que celle des propositions qui résultent de la définition des programmes : l'ordre seul des théorèmes est interverti.

Mais, l'inconvénient principal qui s'attache au choix de

(1) Voy. *Plan d'Etudes des Lycées.* — Classe de mathématiques spéciales. — *Passim.*

ces définitions, c'est qu'il détruit absolument l'analogie qui doit exister entre la théorie de la similitude des figures planes et celle des figures solides; or, cette analogie doit être complète, non-seulement dans les définitions et dans l'ordre des propositions, mais encore dans les démonstrations mêmes des théorèmes.

« La conservation de l'analogie entre les parties d'un même traité, dit S.-F. Lacroix, est de la plus haute importance, puisqu'en même temps qu'elle aide la mémoire du lecteur, elle l'accoutume à généraliser ses idées. En effet, depuis qu'on a cultivé la stéréotomie, on a remarqué que la plupart des propriétés des lignes et des figures, tracées sur un même plan, n'étaient que des cas particuliers de celles des lignes, des plans et des corps, considérés dans l'espace ; et il devenu indispensable de traiter, autant qu'il est possible, dans le même ordre et par des moyens semblables, la partie de la géométrie où l'on n'a égard qu'à deux des dimensions de l'espace et celle où l'on embrasse les trois à la fois (1). »

Cette observation de Lacroix est encore plus importante aujourd'hui qu'il y a soixante ans, la géométrie analytique à trois dimensions étant entrée depuis cette époque dans l'enseignement classique.

Il est vrai que la définition des programmes officiels renferme, en grand nombre, des conditions que nous avons nommées superflues (chap. V), et qu'on pourrait se contenter de faire entrer, dans la définition des polyèdres semblables, l'idée de *faces semblables* et celle de *dièdres égaux* chacun à chacun, à la place de celle d'*angles so-*

(1) Voy. S.-F. Lacroix. — *Discours lu à la Société Philomatique*. an VI.

lides égaux; mais, encore une fois, il n'y aurait aucun avantage à adopter même cette minime restriction : nous avons reconnu que l'introduction des conditions superflues, dans une définition, est permise, et qu'elle devient une obligation, s'il s'agit de rendre une définition naturelle ; et l'on ne saurait nier que la définition des polyèdres semblables, qu'on trouve dans les programmes officiels, ne satisfasse complètement à toutes les conditions d'une bonne définition.

Une remarque analogue à celle qui précède, peut trouver sa place dans la théorie des grandeurs proportionnelles, telle qu'elle est proposée par quelques auteurs modernes.

Le point essentiel de cette théorie est de présenter à l'élève la question sous une forme rigoureuse, et assez simple pour qu'il puisse aisément en retrouver la trace et le développement, dans toutes les circonstances semblables. Sous ce rapport, il est regrettable que quelques auteurs, s'écartant de l'idée naturelle des grandeurs proportionnelles, aient cherché à adopter et à préconiser une définition toute de fantaisie, dont la seule qualité consiste à changer l'espèce et le nombre des conditions qui se rattachent ordinairement au mot *proportionnel.*

L'idée générale que tout le monde possède des grandeurs proportionnelles, est exprimée par la définition suivante, qui se trouve dans presque tous les traités d'arithmétique :

« On dit que *deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre,* lorsque deux valeurs quelconques de la première ont le même rapport que les valeurs correspondantes de la seconde. La géométrie, la mécanique, la physique, font connaître des grandeurs proportionnelles

les unes aux autres. En arithmétique, on n'a, dans aucun cas, pour objet de démontrer cette proportionnalité : on l'admet comme un fait qui sert à la solution des questions relatives à ces grandeurs (1). »

Le mot *simultané*, que quelques auteurs se plaisent à introduire dans cette définition, doit en être exclu ; car, si ce mot fait image dans la définition, il n'y ajoute rien, et il peut donner à croire que la condition de simultanéité dans les valeurs correspondantes est essentielle, pour que les deux grandeurs dont il s'agit soient proportionnelles, tandis que cela n'est pas : le *temps* n'entre pour rien dans la proportionnalité de deux grandeurs. En vérité, il n'existe pas un seul exemple en géométrie, ni en mécanique, ni en physique, de deux grandeurs proportionnelles qui le soient simultanément ; cette condition de simultanéité doit donc être supprimée de la définition, non-seulement comme superflue, mais encore comme contraire à la nature des choses, c'est-à-dire comme étant purement artificielle.

La définition de deux grandeurs proportionnelles, telle qu'elle a été donnée plus haut, ne laisse rien à désirer, car elle comprend toutes les conditions naturelles auxquelles doivent satisfaire deux grandeurs pour être proportionnelles ; elle suppose d'ailleurs connue la signification du mot *rapport*, quelle que soit la signification qu'on attache à ce mot. Mais, pour faciliter les applications numériques qu'on peut faire des propriétés de deux grandeurs proportionnelles, on démontre, en arithmétique, le principe ou théorème suivant :

(1) Voy. J. Bertrand, *Traité d'Arithmétique*, chap. XII.

Lorsque deux grandeurs sont telles que, si l'une devient deux, trois, quatre fois plus grande ou plus petite, l'autre devient aussi deux, trois, quatre fois plus grande ou plus petite, ces deux grandeurs sont proportionnelles.

On en conclut qu'il suffit de reconnaître que deux grandeurs satisfont à la condition exprimée par ce théorème, pour être en droit d'affirmer qu'elles sont proportionnelles. Cependant, quelques auteurs ont proposé récemment de remplacer ce théorème par celui-ci, qui présente à un haut degré le caractère des définitions artificielles :

Deux grandeurs (de nature différente), *sont proportionnelles l'une à l'autre, si à deux valeurs* (quelconques, mais) *égales* (entre elles) *de la première, répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première, répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.*

Avec un peu d'attention, on reconnaît sans peine que l'énoncé de ce nouveau principe, même débarrassé des termes inutiles qui l'encombrent, n'est pas plus simple que le précédent ; que la rigueur ne gagne absolument rien à ce que *la somme* de deux valeurs quelconques remplace *un multiple* d'une valeur quelconque, attendu que la multiplication est un cas particulier de l'addition ; que l'idée de somme ne s'associe pas aussi naturellement que celle de multiple, à l'idée générale de rapport ou de grandeurs proportionnelles ; enfin, que la démonstration du principe ainsi énoncé, si elle est complète, n'est pas plus facile ni plus courte que la démonstration vulgaire. Il est donc difficile de s'expliquer logiquement, que ce

second principe soit préféré au premier, pour un autre motif que le bon plaisir de son auteur.

Quant à l'usage que l'on peut faire, soit de l'un, soit de l'autre, dans les Éléments de géométrie, en vue d'abréger les raisonnements propres à chaque question relative aux grandeurs proportionnelles, il est à souhaiter que cet usage puisse se répandre et s'implanter dans l'enseignement élémentaire; car, ce qu'il y a de général, dans les démonstrations relatives aux grandeurs proportionnelles, étant mis à part, il est certain qu'on distingue mieux ensuite ce qui est particulier à chacune d'elles. Cependant, on ne saurait méconnaître que l'esprit d'analogie manque à la jeunesse, même la plus studieuse, et que l'application d'un principe général est une chose toujours difficile pour un élève : cette difficulté augmente encore, si le principe général, qu'il lui faut appliquer et qui est, en définitive, la partie abstraite de la démonstration, n'a pas une forme simple, naturelle et brève, qui se prête aisément aux transformations. A ce point de vue, essentiellement pratique, on ne voit pas non plus quel avantage on peut retirer, même avec la meilleure volonté du monde, de l'introduction de ce nouveau principe dans l'enseignement de la théorie des grandeurs proportionnelles.

CHAPITRE VII

Premières définitions de la Géométrie

On pense assez généralement que les mots *volume*, *ligne* et *point*, expriment des idées dont la simplicité va en croissant par degrés, dans l'ordre où ils sont écrits. Ainsi, il semble à beaucoup d'esprits que l'idée de surface est plus simple que celle de volume, l'idée de ligne plus simple que celle de surface, et l'idée de point plus simple que celle de ligne. C'est pourquoi certains auteurs, peu soucieux du fond des choses, dont l'esprit est rempli outre mesure des idées d'application pratique, ont cru bien faire que de donner la définition du *point* en premier lieu, comme étant ce qu'il y a de plus facile à comprendre, et de définir ensuite la *ligne* au moyen du point, la *surface* au moyen de la ligne et le *volume* au moyen de la surface ; d'autres, ayant quelques scrupules, l'ont fait en partie seulement, peut-être avec le regret de ne pouvoir aller plus loin. Cette manière de voir est une erreur, et c'est précisément le contraire qui est vrai : il suffit, pour s'en convaincre, d'analyser comment l'esprit acquiert successivement les idées de volume, surface, ligne et point.

L'esprit conçoit d'abord, en partant de l'existence des corps et sans aucune abstraction nécessaire, ce que c'est que le *volume d'un corps*, en tant que c'est l'ensemble des parties de l'espace que ce corps occupe; puis, faisant abstraction de tout ce qui est intérieur au corps et le considérant seulement dans les parties qui sont en contact avec l'extérieur, il donne le nom de *surface géométrique* à l'ensemble de ces parties qui sont communes au corps et à l'espace environnant. L'esprit n'arrive ainsi à l'idée de surface géométrique qu'après avoir fait une première abstraction se rapportant à toutes les parties intérieures du volume.

L'idée de surface conduit de même l'esprit, au moyen d'une seconde abstraction, à celle de ligne; une *ligne géométrique* n'étant autre chose que l'ensemble des parties communes à deux surfaces qui se rencontrent.

Pareillement, si l'on considère deux lignes qui se coupent, uniquement dans la partie qui est à la fois sur l'une et sur l'autre, et si l'on fait abstraction des autres parties, on arrive à l'idée du *point géométrique*. C'est donc par le moyen de trois abstractions successives que l'esprit parvient à concevoir et à définir le point mathématique.

En résumé, les idées de *volume*, *surface*, *ligne* et *point*, sous le rapport géométrique, naissent dans l'ordre où ces mots sont écrits; les définitions qui en découlent doivent donc se succéder dans cet ordre, et non pas dans l'ordre inverse.

Il y a, il est vrai, une autre manière d'exprimer le même résultat, c'est de dire qu'une surface est la limite du volume d'un corps, une ligne la limite d'une surface, un point la limite d'une ligne (1). Donner ces définitions,

(1) Voy. S.-F. Lacroix, *Eléments de Géométrie*, 3e édit. 1803.

c'est procéder rationnellement par une série d'abstractions, mais sans indiquer la nature de ces abstractions. Ces définitions sont donc exactes au fond, mais plus difficiles à comprendre que les premières.

On retrouve la même qualité avec le même défaut, mais à un plus haut degré, dans les définitions suivantes, qui sont cependant très-vulgaires : un volume est ce qui a trois dimensions, longueur, largeur et épaisseur (1) : une surface est ce qui a deux dimensions, longueur et largeur, sans épaisseur ; une ligne est ce qui n'a qu'une dimension, longueur, sans largeur ni épaisseur. Il faut donc enlever à un volume, par la pensée, ses trois dimensions pour obtenir le point mathématique. Ces définitions expriment d'une manière exacte, mais trop concise, ce que nous avons précisé un peu auparavant ; elles ne spécifient rien d'ailleurs sur la nature des abstractions que l'esprit doit faire pour arriver au résultat. Or, on ne doit pas perdre de vue qu'un corps cesse d'exister réellement, si l'une de ses dimensions vient à disparaître ; qu'il n'y a point effectivement de longueur sans largeur, ni épaisseur, et encore moins quelque chose qui n'ait aucune dimension. Le point, la ligne et la surface géométriques ne sont que de pures abstractions de l'esprit : le volume géométrique d'un corps peut se concevoir lui-même, indépendamment du corps dont il tient la place ; c'est donc aussi, au point de vue mathématique, une pure abstraction. Qu'est-ce donc alors que ce qui a longueur et largeur, et point d'épaisseur ? qu'est-ce qu'une figure qui n'a aucune dimension ? C'est ce qu'il est très-difficile de comprendre, si l'on ne s'est pas

(1) Voy. Legendre. *Eléments de Géométrie*, 15ᵉ édit.

expliqué auparavant comment une pareille figure est possible, si l'esprit n'a pas été amené par degrés à faire une série d'abstractions déterminées et analogues à celles qui ont été indiquées plus haut. Dans le cas actuel, chacune de ces abstractions n'est autre chose que l'opération dont il a été question dans le développement des qualités particulières que doit posséder une bonne définition géométrique (chap. IV); chacune d'elles est une démonstration servant à établir que la figure définie est *possible*.

Pour démontrer qu'une figure géométrique est possible, il suffit, comme on l'a vu, de donner un moyen de construire cette figure ; ce moyen peut être très-mauvais, si l'on essaie de le mettre en pratique, il peut être une simple opération de l'esprit, comme dans ces premières définitions de la géométrie; mais il faut que ce moyen soit donné pour que la définition se trouve justifiée. C'est donc par un pur oubli de l'une des qualités essentielles que doivent posséder toutes les définitions géométriques, que certains auteurs, bien intentionnés d'ailleurs, ont cru pouvoir écourter ainsi les premières définitions de la géométrie.

Rien n'empèche, d'ailleurs, de retourner après coup la série des idées qui ont conduit l'esprit à la découverte du point mathématique, et d'imaginer qu'un point se déplace dans l'espace. Ce point, dans son mouvement, produira une ligne; la ligne en mouvement décrira une surface, et la surface un volume.

Il est à noter qu'en général l'opération, qu'on indique pour démontrer qu'une figure géométrique est possible, n'est pas toujours la plus simple manière de construire cette figure. S'il arrive que la meilleure solution

logique soit aussi la meilleure solution pratique, tant mieux! mais, à coup sûr, ce ne sera pas toujours ainsi, et souvent même le contraire se produira.

Cela tient à ce que, dans la bonne pratique des choses, on doit mettre en jeu tous les résultats obtenus, toutes les connaissances acquises sur le sujet en question, sans s'inquiéter de l'ordre logique des idées; quelquefois même, la meilleure application pratique exigera le renversement complet de l'ordre logique des idées qui ont conduit à faire cette application. Dès qu'il s'agit d'atteindre un but pratique, le procédé le plus court est évidemment le meilleur; mais, pour justifier une définition placée au début d'une théorie, il y aura toujours péril, au point de vue de la logique, à renvoyer le lecteur, comme l'ont fait plusieurs auteurs et notamment Clairant, à la solution d'un problème qui n'est donnée qu'à la fin de cette théorie.

C'est sans doute en l'entendant de cette façon, mais en se trompant de mot, que des esprits sérieux ont osé dire tout haut et écrire tout au long qu'il y a deux espèces de logique, la logique *théorique* et la logique *pratique,* et que, dans l'enseignement classique, on doit tenir compte de la seconde comme de la première. En réalité, il n'y a pas deux sortes de logique : tout ce qui n'est pas logique est illogique, et la meilleure manière d'arriver à une bonne pratique des choses, c'est d'apprendre parfaitement la théorie logique des idées. La distinction qui précède de la logique en deux espèces ne saurait donc aboutir, au point de vue de l'enseignement classique, qu'à un barbarisme prétentieux et vide de sens.

CHAPITRE VIII

Définition des lignes et surfaces courbes

Les anciens géomètres avaient imaginé, pour résoudre les questions relatives aux lignes et surfaces courbes, de substituer à ces figures d'autres figures qu'ils savaient déjà comparer entre elles et qui pouvaient différer des premières d'aussi peu qu'on voulait. Ils cherchaient ensuite la relation entre ces nouvelles figures, qu'ils choisissaient de la manière la plus commode, et, cette relation une fois trouvée, ils en déduisaient par analogie, induction ou intuition, celle qui devait exister entre les figures considérées. Ce procédé naturel n'est autre chose, à proprement parler, que la *méthode des limites*.

Pour compléter la question, pour en mettre la solution en quelque sorte à l'abri de toute attaque, ils démontraient en outre que cette solution ne pouvait pas ne pas être la vraie : cette dernière partie de la démonstration se faisait par la méthode connue sous le nom de *réduction à l'absurde*.

C'est ainsi qu'Euclide a prouvé que *deux cercles quelconques sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Les géomètres modernes ont perfectionné ce genre de démonstration, en appuyant le raisonnement sur un petit nombre de principes généraux, dont l'ensemble forme la *théorie des limites*. Ils l'ont aussi simplifié, en le débarrassant de cet appendice du raisonnement, où l'on réduit à l'absurde toute hypothèse contraire, ce qui est bon pour convaincre l'esprit, mais très-peu propre à l'éclairer, surtout si la proposition dont il s'agit est compliquée.

Cependant quelques esprits se sont fortement préoccupés, dans ces dernières années, du désir de simplifier encore davantage les démonstrations propres à la mesure des lignes et surfaces courbes et d'augmenter encore, si cela est possible, la rigueur de ces démonstrations, ce qui constituerait un double et véritable progrès.

La simplification s'est présentée d'elle même, en ce sens que la théorie des limites est entrée aujourd'hui dans l'enseignement classique de l'algèbre, et qu'on peut se dispenser d'en développer les principes dans les traités de géométrie.

Quant à l'augmentation de rigueur, elle porte uniquement sur cette considération que la longueur d'un arc de cercle ou d'une circonférence, l'aire d'un cercle, d'un cylindre, etc. ne sont pas des grandeurs que l'on puisse, à priori, introduire dans une démonstration, c'est-à-dire dans une comparaison avec des lignes ou des surfaces brisées, comme le firent Archimède et Euclide, comme l'ont fait Legendre et Lacroix, comme le conseillent encore les derniers programmes officiels.

Tout le monde s'accorde, il est vrai, à reconnaître que la longueur d'une ligne droite n'est pas susceptible de définition, c'est à-dire que l'idée de longueur, quand il

s'agit d'une ligne droite, est une idée simple, qu'on doit introduire directement dans les considérations géométriques. Mais, d'après quelques géomètres, il n'en est pas de même de la longueur d'une ligne courbe ; et il est nécessaire de ramener la notion générale de longueur à celle de la ligne droite, ainsi que la notion générale des aires à celle d'une aire polygonale, plane ou brisée, au moyen de nouvelles définitions dûment justifiées. C'est ainsi que l'on a été conduit à formuler, dans les Eléments de géométrie, des définitions telles que celles-ci :

« *La longueur d'un arc de cercle est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans cet arc, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés.* »

Et en particulier :

« *La longueur d'une circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.* »

Et de même :

« L'aire latérale du prisme inscrit (à un cylindre) tend vers une limite fixe, indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de sa base tendent vers zéro ; c'est *cette limite que l'on appelle l'aire latérale du cylindre.* »

Cet énoncé est donné comme une définition.

Et encore :

« On appelle *aire latérale* d'un cône la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite, dont le nombre des faces croît indéfiniment. » On légitime cette *définition* en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. »



Et enfin :

« Considérons un arc de cercle et une ligne brisée régulière inscrite ; tandis que l'arc tourne autour d'un diamètre, la ligne brisée régulière engendre une aire, qui tend vers une limite indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro..... C'est cette limite de l'aire engendrée par la ligne brisée régulière inscrite qu'on appelle *aire de la zone* décrite par l'arc. »

Ce procédé d'ailleurs n'est pas nouveau.

Dans un traité d'analyse, qui passe avec quelque raison pour le plus rigoureux et le plus exact des traités de mathématiques, le procédé a déjà été mis en lumière, il y a une douzaine d'années, et d'une manière très-remarquable.

L'auteur commence le chapitre relatif à la mesure des lignes et surfaces courbes par ces mots : « La notion de longueur est une de celles qui ne sont pas susceptibles de définition. » Ces mots se rapportent à la longueur d'une ligne droite; mais, quand il s'agit de la longueur d'une ligne courbe, il continue ainsi :

La définition générale, au moyen de laquelle la notion de longueur est ramenée au cas de ligne droite, est la suivante :

« *La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cet arc et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.* »

L'auteur démontre que cette limite existe et est unique, à l'aide de la notion de tangente à un arc de courbe.

Une définition analogue se rencontre pour l'aire des surfaces courbes.

« Nous appellerons *aire d'une portion de surface la*

limite vers laquelle tend celle d'une polyèdre inscrit dont les faces sont infiniment petites dans tous les sens. »

Il est encore nécessaire de démontrer que cette limite existe et est unique, quelle que soit la figure des faces du polyèdre et la loi de leur décroissement.

L'auteur le démontre à l'aide de la notion du plan tangent à une surface.

Examinons si le choix de ces nouvelles définitions est conforme à toutes les règles, générales et particulières, qui ont été établies pour formuler une bonne définition géométrique.

CHAPITRE IX

Règles générales de la définition des lignes et surfaces courbes.

Sans doute, il ne faut pas oublier que les définitions de la géométrie sont absolument personnelles, arbitraires et incontestables (chap. III); cependant, sous le rapport des règles générales, on peut se demander si l'on ne cherche pas ici à définir des termes qui expriment des notions assez simples pour entrer, sans aucune explication préalable, dans une combinaison d'idées (chap. IV).

La longueur d'une ligne est une qualité particulière de cette ligne, qui est tout à fait distincte de la ligne elle-même, mais qui en est pourtant inséparable, de même que la surface d'un cercle est inséparable du cercle et le volume d'un cylindre inséparable du cylindre. On ne saurait concevoir, un effet, qu'une ligne puisse exister sans longueur, pas plus qu'une surface sans longueur ni largeur, pas plus qu'un volume sans ses trois dimensions (chap. VII.)

Il est vrai que la longueur d'une ligne, la surface d'un cercle et le volume d'un cylindre, existent ainsi à l'état

idéal ou théorique, et que cette idée ne prend une forme matérielle ou sensible que si l'on procède à la mesure de la ligne, de la surface ou du volume. Cette mesure se traduit alors nécessairement par une série d'opérations graphiques ou arithmétiques, qui peuvent aboutir, même dans le cas de la ligne droite, à un résulat non susceptible de s'exprimer par des nombres; cela arrive toutes les fois que l'infini se rencontre sous une forme quelconque dans la série des opérations. Mais, si l'exactitude des opérations graphiques trouve des bornes dans l'inévitable imperfection des instruments, si, par le calcul, nous approchons indéfiniment de la longueur d'une courbe, sans jamais pouvoir l'exprimer exactement, il n'en demeure pas moins vrai que nous atteignons, par la pensée, sans peine et d'un seul coup, cette limite qui n'est autre chose que la longueur de la ligne.

Il est donc permis d'affirmer raisonnablement que la longueur d'une ligne courbe définie existe, même pour celui qui ne peut pas ou ne sait pas la mesurer. Il est permis de tenir pour certaine cette vérité, par exemple, que la longueur d'une ligne courbe est moindre que celle de telle ou telle autre, si cette vérité résulte de la double définition de la ligne droite et de la ligne courbe, et de quelque autre vérité déjà reconnue, sans qu'il soit nécessaire de trouver le nombre qui exprime la mesure ni de l'une ni de l'autre. Et l'on ne saurait établir de différence, sous ce rapport, entre la surface d'un rectangle, défini par sa base et sa hauteur, et l'aire d'un cercle défini par son rayon : il y a tel rectangle dont la surface est évidemment plus grande ou plus petite que celle d'un cercle, ce qui implique forcément cette idée que, si l'on mesurait la surface du rectangle et celle du cercle, le

résultat trouvé pour la première surpasserait le résultat trouvé pour la seconde. Renverser les termes de cette affirmation est évidemment un contre-sens, au point de vue théorique de la définition.

D'où l'on peut conclure que, si une ligne est définie convenablement, la longueur de cette ligne *existe,* par cela même que la ligne a été définie, et cette longueur est évidemment *unique;* en d'autres termes, la longueur de la ligne se trouve elle-même définie, sans qu'il soit besoin de *ramener la notion de sa longueur à une autre plus simple* (1).

Secondement, si l'on est obligé de choisir une définition, il faut faire en sorte que le mot qu'on emploie ait, autant que possible, une signification conforme à l'idée générale que tout le monde en a, c'est-à-dire à son étymologie (chap. IV). Or, l'idée que tout le monde se fait de la longueur d'un arc de cercle, n'est certes pas celle de *la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans cet arc, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés.* C'est une manière de voir, qui est exacte sans doute, mais qui est trop peu naturelle pour être prise comme définition.

Lorsqu'il s'agit de l'enseignement élémentaire surtout, cela a de l'importance; car, comme on l'a vu dans le chapitre II, en suivant l'ordre logique des idées, on a déjà plusieurs fois considéré la longueur d'un arc de cercle, avant d'aborder la question de sa mesure. S'il

(1) Quelques classiques modernes ont écrit ou reproduit de confiance, sur ce sujet, des paragraphes entiers, qui sont remplis de contradictions dans les termes et dans les idées, et que nous recommandons aux élèves de lire avec attention.

y a nécessité d'envisager cette figure sous un point de vue nouveau, il faudra le faire, cela va sans dire ; mais que cette considération serve de texte à un théorème nouveau, comme le recommande toute l'économie des programmes officiels (1), et ne soit pas l'objet d'une nouvelle définition. Autrement, vous courez le risque, presque certain, de jeter la confusion dans une série d'idées très-claires d'aileurs, et vous perdez en netteté ce que vous espériez gagner en rigueur.

Si encore il résultait de cette manière de faire, un avantage notable pour la brièveté de la démonstration ! Mais il n'en est rien : la longueur du raisonnement, nécessaire à la complète justification de cette nouvelle sorte de définition, égale tout au moins l'étendue des démonstrations ordinaires de la géométrie. Il est aisé de s'en assurer, en examinant de plus près cette justification.

Des professeurs très-distingués nous ont avoué qu'ils avaient de bonne foi cherché à adopter, dans leur enseignement, cette manière de procéder ; ils se donnaient beaucoup de peine, se heurtaient à des difficultés continuelles, et ont fini par reconnaître que l'introduction brusque de cette définition dans les éléments, n'était qu'un rouage de plus à faire mouvoir, c'est-à-dire une complication ; or, ce qu'il faut à l'enseignement, c'est la simplicité.

(1) Voy. *Plan d'Etudes des Lycées*, prog. 5, la note.

CHAPITRE X

Règles particulières de la définition des lignes et surfaces courbes

La justification d'une définition a pour but de faire voir que cette définition satisfait aux deux conditions particulières d'une bonne définition géométrique (chap. IV). Dans le cas actuel, cette justification comprend deux parties : 1° une partie, où l'on démontre qu'*il existe une limite* vers laquelle tend la longueur du périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite à un arc de cercle, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés ; 2° une partie dans laquelle on démontre que *cette limite est unique*.

Le raisonnement habituel par lequel se trouve établie la première partie de cette justification, est le suivant :

« *Concevons d'abord qu'il n'y ait que deux côtés dans la ligne brisée régulière inscrite à l'arc ; puis supposons qu'on double le nombre des côtés, une fois, deux fois, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que le nombre des côtés soit exprimé par la formule* 2^n, *n croissant indéfiniment. Le périmètre croîtra constamment ; et, comme on peut facilement assigner une quantité finie au-dessous de laquelle il*

reste toujours, il tendra évidemment vers une limite. Donc, etc. »

Cette démonstration est-elle irréprochable ? De ce que le périmètre d'une ligne brisée régulière, inscrite à un arc de cercle, croît sans cesse et reste inférieur à celui d'une ligne polygonale finie, extérieure à l'arc considéré et terminée aux mêmes extrémités, peut-on conclure que ce périmètre tend vers une limite ? Il suffit, pour s'en assurer, d'appliquer à ce raisonnement le procédé, bien connu en logique, qui consiste à remplacer le terme *limite* dont on se sert ici, par la périphrase équivalente, dont ce terme tient conventionnellement la place. Or, on appelle *limite* d'une quantité variable, une *quantité constante dont la variable s'approche indéfiniment, sans jamais l'atteindre* (1), et il est aisé de reconnaître que, dans la démonstration précédente, cette qualité caractéristique d'une limite manque complètement. Il n'y est question d'aucune quantité constante dont la longueur du périmètre s'approche indéfiniment, mais seulement du périmètre d'une ligne brisée, extérieure à l'arc, qui est plus grand que celui de toutes les lignes brisées inscrites à l'arc, et qui ne peut mériter en aucune sorte la qualification de limite, telle qu'on l'entend ordinairement dans la géométrie.

On peut aussi, pour vérifier la solidité de ce raisonnement, le retourner en l'appliquant aux périmètres des lignes polygonales circonscrites : on voit tout de suite que ces périmètres vont en diminuant constamment, sans qu'ils puissent cependant tomber au-dessous de la corde qui soustend l'arc considéré. Est-ce une raison suffisante

(1) Voy. Duhamel. *Eléments de calcul infinitésimal*, pag. 9 et 223.

pour qu'on puisse conclure qu'ils tendent vers une limite? Evidemment, non.

Ce qu'il faudrait ici, c'est qu'on pût comparer la longueur variable des périmètres des lignes brisées inscrites à une quantité constante, par exemple à la longueur de l'arc, et prouver qu'ils s'en approchent indéfiniment; mais, puisque la longueur de l'arc n'existe pas encore pour ceux qui ont adopté la nouvelle définition, cette comparaison est impossible, et il faut garder la conclusion qu'ils ont tirée pour ce qu'elle vaut, ou bien reconnaître qu'ils ont péché contre cette règle établie (ch. IV), qu'on ne doit employer dans les définitions, que des termes parfaitement connus ou déjà définis. De toute façon, la première partie de la justification, propre à cette nouvelle définition, demeure incomplète.

La seconde partie de cette justification a pour but de démontrer que *la limite est unique*. Le raisonnement qu'on trouve dans les Eléments de géométrie, consiste à considérer deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit, d'un nombre n de côtés; puis, deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit, d'un nombre n' de côtés; et à faire voir que la limite l vers laquelle tendent les périmètres des deux premiers, lorsqu'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés, ne peut être ni plus petite ni plus grande que la limite l' vers laquelle tendent les deux autres. Or, on reconnaît dans cette manière de raisonner, le fond même de la méthode de *réduction à l'absurde*, telle que l'employaient les anciens, et on voit aussi que l'application en est faite à un principe général, abstrait, difficile, de manière à rencontrer tous les inconvénients que cette méthode peut présenter; par conséquent, la seconde partie de la justification, propre à la nouvelle

définition, laisse aussi quelque chose à désirer. Et l'on peut dire, en résumé, qu'au point de vue de l'enseignement élémentaire, la nouvelle définition d'un arc de courbe ne possède aucune des qualités, tant générales que particulières, d'une bonne définition géométrique.

Il est aisé de comprendre qu'une vérification, en tous points semblable, des règles établies dans le chap. IV, pourrait se faire sur les définitions modernes de l'aire d'une zone, d'un cylindre et d'un cône, et que cette vérification nous conduirait à une conclusion identique.

CHAPITRE XI

Justification exacte de la définition des lignes et surfaces courbes.

La définition des lignes et surfaces courbes, imaginée par les modernes, est susceptible d'une justification exacte, qui peut se réduire à des termes assez simples, lorsqu'on convient de la débarrasser des lemmes et scolies essentiels à son complet développement. Pour satisfaire à la première partie de cette justification, on commencera par inscrire au cercle un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, et par lui circonscrire un polygone régulier semblable; puis on doublera une fois, deux fois, trois fois, et ainsi de suite, le nombre des côtés de chaque polygone. On représentera ensuite par des nombres les périmètres des polygones circonscrits, ainsi que ceux des polygones inscrits, et on établira les trois points suivants :

1° *Les premiers nombres vont tous en diminuant, les seconds vont tous en augmentant.*

2° *Tout nombre de la première série est plus grand que son correspondant de la seconde.*

3° *La différence entre deux nombres correspondants peut devenir aussi petite que l'on veut.*

Dès l'instant que ces trois conditions sont remplies, il y a une limite commune pour ces deux séries de nombres, et cette limite peut être appelée, si l'on veut, *longueur de la circonférence* ou *longueur de l'arc*. Cependant, est-il évident que deux séries de nombres qui satisfont aux trois conditions énoncées tendent vers une limite commune? Quelques géomètres acceptent cette conséquence abstraite comme vraie, sans démonstration (1). Mais, c'est à la condition de renoncer à l'idée générale que réveille le mot *limite*. On appelle *limite*, il ne faut pas l'oublier, une quantité constante dont la variable peut s'approcher indéfiniment, sans jamais l'atteindre; ce qui suppose nécessairement une comparaison directe ou indirecte entre la limite et la variable. Or, dans le cas actuel, cette comparaison, même indirecte, n'existe pas; et il faut absolument, pour que la démonstration précédente devienne rigoureuse, qu'elle soit complétée, comme l'ont proposé plusieurs savants (2); voici ce complément :

Considérons deux séries de nombres satisfaisant aux trois conditions énoncées; supposons que ceux de la première série représentent des longueurs comptées, à partir d'une origine fixe, sur une droite, et que ceux de la seconde série représentent aussi des longueurs comptées sur la même droite, à partir de la même origine. Cette supposition est toujours possible, quelle que soit l'espèce de grandeurs que ces nombres représentent, pourvu que l'espèce en soit la même.

(1) Voy J.-A. Serret, *El. d'Arithm.*, 4e éd., p.137. Briot, *Leç. nouv. d'Arithm.*, 3e éd., p. 196. Ch. Simon, *Précis d'Arithm.*, p. 182.

(2) Voy. E. Burat, *Traité d'Arithm.*, pag. 202. Voy. J. Bertrand, *Trait. d'Arithm.*, chap. X.

Il résulte des trois conditions auxquelles satisfont ces deux séries de nombres, que : 1° les extrémités des longueurs de la première série iront en se rapprochant de l'origine, tandis que les extrémités des autres s'en éloigneront de plus en plus ; 2° les extrémités des longueurs de la première série ne s'entremêleront jamais avec les extrémités des autres ; 3° la distance qui sépare les extrémités de deux longueurs correspondantes, dans l'une et l'autre série, deviendra aussi petite que l'on voudra.

On conclut de là qu'il n'y a pas d'intervalle entre les deux régions de la droite sur lesquelles tombent les extrémités des longueurs de la première série et celles de la seconde, et qu'entre ces deux régions il existe seulement *un point*, dont la distance à l'origine possède toutes les qualités requises pour être une *limite* commune aux deux séries de nombres considérées.

Pour satisfaire à la seconde partie de la justification, il suffit de faire voir que deux séries de nombres, remplissent les trois conditions énoncées, tendent vers la même limite que deux autres séries de nombres, remplissant les mêmes conditions. Rien ne s'oppose ici à l'emploi de la méthode de réduction à l'absurde ; car, les nombres dont il s'agit étant assujétis, dans la démonstration, à représenter des longueurs rectilignes, on se trouve en présence d'une question spéciale, concrète et facile, dans laquelle la méthode de réduction à l'absurde ne souffre aucune difficulté.

La définition de la longueur d'une ligne courbe se trouve ainsi justifiée d'une manière exacte et précise.

Cette justification est très-générale ; elle peut s'appliquer mot à mot non-seulement à la définition de la longueur d'un arc, mais encore à celle de l'aire d'une sur-

face courbe et à celle du volume d'un corps rond. Elle se réduit, d'ailleurs, à des termes assez simples, si l'on convient de la débarrasser du complément par lequel on démontre que deux séries de nombres, satisfaisant aux trois conditions énoncées, tendent vers une limite commune et unique. Mais ce complément, pour peu qu'on réfléchisse à la question, paraît être indispensable.

Au surplus, on ne saurait raisonner en laissant, dans chaque cas particulier, les deux séries de nombres représenter, jusqu'à la fin de la démonstration, les grandeurs mêmes que l'on considère au point de départ, sans que la démonstration perdît toute sa simplicité et sa précision ; car, s'il est facile de suivre sur une droite les deux régions de cette droite, où tombent les extrémités des longueurs rectilignes comptées à partir d'une même origine, il est difficile d'envisager de la même manière et de comparer entre elles les deux régions du plan ou de l'espace, sur lesquelles tomberaient des surfaces développées ou des volumes polyédraux.

Remarquons, en terminant, que la justification qui précède revient à démontrer les deux points suivants : 1° un arc de courbe a une longueur, puisque cet arc peut être rectifié et que la chose est évidente pour une ligne droite ; 2° la définition de l'aire d'une surface courbe et celle du volume d'un corps rond peuvent se ramener à la définition de la longueur d'une ligne. C'est précisément en sens inverse qu'il faut s'attacher à suivre cet ordre d'idées, pour obtenir une simplification réelle dans les questions relatives à la mesure des lignes et surfaces courbes; on le démontre dans le chapitre suivant.

CHAPITRE XII

Méthode Euclidienne dans la mesure des lignes et surfaces courbes

L'établissement des principales propriétés des lignes et surfaces courbes présente, dans la Géométrie élémentaire, une difficulté d'un caractère spécial. Cette difficulté a été sentie par Euclide, et surmontée à grand peine par Legendre ; les géomètres modernes ont vainement essayé de la tourner, parce qu'ils n'en ont pas assez attentivement étudié l'origine. L'origine de cette difficulté est tout entière dans la position même qui est assignée, dans les Eléments, aux propriétés des lignes et surfaces courbes. Ces propriétés, en effet, y sont démontrées presque toutes, en vue de la mesure d'une ligne ou de la quadrature d'une surface ou de la cubature d'un volume, et qui dit question de mesure dit question de calcul; en d'autres termes, question essentiellement pratique. Or, il ne faut pas oublier que, dans une question pratique, la meilleure solution, c'est-à-dire la plus simple, on l'a vu dans le chapitre VI, n'est pas nécesssairement celle qui est la plus conforme à l'ordre logique des idées.

La logique nous conduit, sans contredit, à placer la théorie des lignes avant celle des surfaces, et celle des surfaces avant celle des volumes ; et l'on ne saurait approuver l'idée qui consisterait à déduire les propriétés des surfaces de celles des volumes, et celles des lignes de celles des surfaces. « La théorie des lignes proportionnelles, dit S.-F. Lacroix, déduite de la comparaison des aires des triangles, comme dans les Éléments d'Euclide et dans quelques ouvrages modernes (1), constitue une espèce de désordre dont beaucoup de bons esprits ont le droit d'être choqués. »

Mais, s'il s'agit de mesurer l'étendue de certaines figures, il en est tout autrement. Comme cette mesure se traduit nécessairement par des opérations graphiques ou arithmétiques, en d'autres termes, par une opération pratique, les lois de cette mesure seront d'autant plus difficiles à établir, que la figure mesurée aura une existence plus abstraite. Il est certain d'ailleurs, qu'à l'idée de ligne géométrique, se rattache une abstraction de plus qu'à celle de surface, et deux de plus qu'à celle de volume (chapitre VII). Donc, on devra considérer, d'une manière générale, les principes relatifs à la mesure des lignes comme plus difficiles que ceux qui se rapportent aux aires, et ces derniers comme plus difficiles que ceux qui ont trait à la mesure des volumes ; et il pourra même arriver que, dans quelques-unes de ces questions pratiques, la meilleure solution soit en contradiction apparente avec l'ordre logique des idées. C'est ainsi qu'on peut s'expliquer pourquoi la méthode élémentaire, choisie par Legendre comme la plus simple pour le calcul du

(1) Voy. M. A. Blanchet, *Eléments de Géométrie*. 3e édition, 1859.

nombre π, est la *méthode des aires* (1), et pourquoi presque toutes les méthodes élémentaires ne valent rien dans les questions de calcul un peu difficiles. On voit aussi par là, comment la difficulté inhérente aux propositions, à l'aide desquelles la mesure de la circonférence se ramène à celle des polygones inscrits ou circonscrits, n'est pas levée, mais seulement déplacée, par le choix d'une nouvelle définition ; cette difficulté en est totalement indépendante, puisqu'elle tire son origine de la position même qui est assignée à la question dans les Eléments de géométrie.

Si la difficulté de la mesure des lignes et surfaces courbes peut être diminuée, ce ne sera qu'en procédant comme le faisait Euclide, c'est-à-dire en mettant en jeu, dans les lemmes relatifs à la mesure de la circonférence, la considération directe de la surface du cercle aussi bien que celle de sa circonférence, et, dans les lemmes de la mesure des corps ronds, la considération directe du volume de ces corps aussi bien que celle de leur surface. On ne saurait sans doute approuver Euclide de s'être engagé trop avant dans cette voie, et d'avoir usé du même procédé dans des questions purement théoriques ; mais, sa remarquable sagacité est un exemple à suivre dans toutes les questions de géométrie pratique.

Voici comment devront procéder, en toute rigueur, ceux qui admettent, avec Euclide, que la longueur d'un arc et l'aire d'un cercle sont suffisamment définies par la définition même de l'arc et par celle du cercle, pour démontrer, sans préliminaires d'aucune sorte, que *la sur-*

(1) Voy. Legendre, *Eléments de Géométrie*, 15e édition, Liv. IV, Prop. XIV et suiv.

face d'un cercle est la limite vers laquelle tend celle d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit au cercle, et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Supposons qu'on ait inscrit à un cercle un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, et qu'on lui ait circonscrit un polygone régulier semblable. La différence des aires de ces deux polygones peut devenir aussi petite qu'on voudra, si l'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés ; en effet, on a démontré antérieurement, que les aires de deux polygones réguliers du même nombre de côtés, sont proportionnelles aux carrés de leurs apothèmes, et l'on déduit facilement de cette proportion, que la différence des aires devient, comme celle des carrés des apothèmes, aussi petite que l'on veut, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de chaque polygone. Or, la surface du cercle (mesurée ou non) est évidemment comprise entre les aires des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, du même nombre de côtés, et quel que soit le nombre de ces côtés. Donc, si le nombre des côtés des deux polygones réguliers augmente indéfiniment, les aires des deux polygones s'approchent indéfiniment l'une de l'autre, et, à plus forte raison de la surface du cercle, sans pouvoir jamais l'atteindre ; en d'autres termes, l'aire de chacun des polygones réguliers a pour limite la surface du cercle auquel il est inscrit ou circonscrit.

On en déduira comme corollaire que *la circonférence d'un cercle est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit au cercle, et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment ;* autrement, la surface du cercle ne serait pas la limite de l'aire de ce polygone.

Un lemme analogue peut se démontrer ainsi, sans aucune difficulté, pour le volume des corps ronds (1), avec un corollaire semblable pour la surface des mêmes corps.

(1) Voy., au surplus, nos *Eléments de Géométrie*, 3e éd., pages 289, 304, 341.

CHAPITRE XIII

Définition d'un maximum et d'un minimum.

On dit, d'une manière générale, qu'une quantité variable a une valeur *maximum* ou *minimum*, si cette valeur est plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement, et l'image la plus saisissante qu'on puisse donner de cette définition est celle d'une ligne courbe dont les points se rapprochent d'une droite fixe pour s'en éloigner ensuite, ou inversement. Cette définition, qui est naturelle, n'a pas besoin de plus ample justification, car on rencontre au début du livre II de la géométrie des exemples nombreux de grandeurs variables, pouvant satisfaire à la double condition qui sert à définir un maximum ou un minimum.

Pour déterminer la valeur maximum ou minimum d'une quantité variable, il y a, au point de vue élémentaire, deux marches différentes à suivre : la synthèse et l'analyse.

La synthèse ou *méthode géométrique* consiste à trouver, comme on le peut, et d'après les conditions mêmes expo-

sées dans l'énoncé du problème, la valeur maximum ou minimum demandée, et à démontrer ensuite, en vertu des propriétés géométriques de la figure, que cette valeur est effectivement plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement.

L'analyse ou *méthode algébrique* peut se résumer dans la règle suivante : choisissez une inconnue dont la quantité qui doit être, s'il y a lieu, maximum ou minimum, soit une fonction, et déterminez la valeur de l'inconnue pour laquelle cette fonction est égale à une grandeur arbitraire qu'on suppose donnée; la discussion de la solution du problème ainsi résolu fera savoir si la grandeur arbitraire, qu'on suppose donnée, est assujétie à être choisie entre certaines limites, lesquelles se réduiront au plus à deux : ce sont ces deux limites, s'il y en a, qui sont le maximum et le minimum demandés.

On peut faire à cette méthode algébrique une objection, c'est que le maximum et le minimum qu'elle fournit ne sont pas exactement ce qu'ils ont été définis d'une manière générale; on ne voit pas clairement, en effet, comment on peut, de l'existence d'une limite aux valeurs de la fonction qui correspondent à toutes les valeurs réelles possibles de la variable indépendante, conclure à l'existence d'une valeur de cette fonction, plus grande ou plus petite que toutes celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement. Il semble que la rencontre du maximum et du minimum, dans la discussion du problème qu'on a résolu, soit toute fortuite et artificielle, ou, si l'on veut, qu'il y ait une espèce de lacune entre la définition générale et le résulat particulier donné par la méthode algébrique.

Cette lacune peut être comblée, dans chaque cas, par un raisonnement qui consiste à s'assurer *à posteriori* que les limites trouvées pour la fonction, dans la discussion du problème, satisfont à la double condition qui sert à définir un maximum ou un minimum (1).

Supposons, par exemple, qu'on soit conduit à chercher la valeur de x qui rend maximum ou minimum une fonction de la forme suivante :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

On posera et on résoudra, d'après la règle, l'équation :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m;$$

puis, on discutera la solution du problème qui se traduit par cette équation. Dans cette discussion, trois cas principaux peuvent se présenter, savoir : $b'^2 - 4\,a'c'$ est nul; $b'^2 - 4\,a'c'$ est positif; $b'^2 - 4\,a'c'$ est négatif.

Dans le premier cas, on trouve pour x des valeurs réelles, si le terme $bb' - 2\,(ac' + ca')$ est positif, toutes les fois qu'on prend pour m une valeur plus petite qu'une valeur déterminée que nous appellerons m'; cette valeur déterminée m' étant la plus grande qu'on puisse choisir pour m sans que la racine de l'équation cesse d'être réelle, on dit alors que m' est pour la fonction considérée une *valeur maximum*, correspondant à une valeur x' de la variable qu'on calcule par la formule de résolution.

(1) Voyez *Le Conseiller de l'Enseignement public*, du 15 octobre 1859. Voyez Joseph Bertrand, *Traité d'Algèbre*, 3e édition, 1863, p. 353.

Il est aisé de s'assurer que cette valeur m' satisfait à la définition générale d'un maximum. En effet, si l'on suppose que x ait une valeur peu différente de x' et plus petite, la fonction considérée prendra, en vertu de sa continuité, une valeur peu différente de m', mais *plus petite*, car elle ne peut pas en prendre une plus grande sans que la valeur correspondante de x soit imaginaire; si l'on suppose, au contraire, que x ait une valeur peu différente de x' et plus grande, la fonction prendra une valeur peu différente de m', mais *plus petite*, puisqu'elle ne peut pas en prendre une plus grande sans que la valeur correspondante de x soit imaginaire. Il en résulte que la fonction prend, pour cette valeur x' de la variable, une valeur m' plus grande que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement.

On trouvera de même que si le terme $bb' - 2(ac' + ca')$ est négatif, la fonction prendra, pour une certaine valeur de x, une valeur plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement.

Chacune de ces deux valeurs de la fonction satisfait donc à la définition générale d'un maximum ou d'un minimum.

Dans le second cas, la méthode algébrique ne donne pas de maximum ni de minimum, si les racines de l'équation, qu'on obtient en égalant à zéro le trinôme placé sous le radical, sont imaginaires ou égales; attendu qu'on trouve pour x des valeurs réelles, quelle que soit la valeur qu'on choisisse pour m. Mais, si les racines du trinôme sont réelles et inégales, on trouve pour x des valeurs réelles toutes les fois qu'on prend pour m une valeur non comprise entre les deux racines m' et m'' du trinôme; on dit alors que la plus petite m' des deux racines

est, pour la fonction considérée, une *valeur maximum* et la plus grande m'' une *valeur minimum*, correspondant à une valeur de la variable qu'on calcule par la formule de résolution. Or, il est aisé de s'assurer que ces deux valeurs m' et m'' satisfont à la définition générale, l'une d'un maximum et l'autre d'un minimum; car, on peut répéter textuellement, en s'appuyant sur la continuité de la fonction, le raisonnement qu'on a fait dans le premier cas.

Dans le troisième cas, la méthode algébrique ne donne pas de maximum ni de minimum, si les racines du trinôme placé sous le radical sont égales ou imaginaires, attendu qu'on trouve pour x des valeurs imaginaires, quelle que soit la valeur qu'on choisisse pour m. Mais, si les racines du trinôme sont réelles et inégales, on trouve pour x des valeurs réelles toutes les fois qu'on prend pour m une valeur comprise entre les deux racines m' et m'' du trinôme; on dit alors que la plus petite m' des deux racines est, pour la fonction considérée, une *valeur minimum* et la plus grande m'' une *valeur maximum*, correspondant à une valeur de la variable qu'on calcule par la formule de résolution. Or, il est aisé de s'assurer que ces deux valeurs m' et m'' satisfont à la définition générale, l'une d'un minimum et l'autre d'un maximum; car, on peut répéter encore textuellement, en s'appuyant sur la continuité de la fonction, le raisonnement qu'on a fait dans le premier cas.

En résumé, pour justifier la définition d'un maximum ou d'un minimum, telle qu'on la prend accidentellement dans la théorie algébrique, il est indispensable de démontrer, comme on vient de l'indiquer, que dans tous les

cas où la méthode élémentaire accuse l'existence d'un maximum ou d'un minimum, les valeurs obtenues par cette méthode satisfont à la définition générale, qui seule est vraiment naturelle.

CHAPITRE XIV

Définition arithmétique du nombre.

Toutes les transformations ou opérations de l'arithmétique s'exécutant sur des nombres, il est clair que ces opérations ne peuvent avoir un sens précis et général qu'à la condition que le mot *nombre* y soit pris lui-même avec un sens précis et général. Mais, d'un côté, si la première idée que nous ayons du nombre nous vient de la pluralité d'objets de même espèce ou de la répétition du même phénomène, d'un autre côté, cette idée ne trouve son complet développement que dans la question de la mesure des grandeurs : un nombre est, dans toute la force du terme, l'expression du résultat de la comparaison d'une grandeur à une unité de même espèce. L'existence générale des nombres est donc subordonnée à l'opération, matérielle ou fictive, par laquelle se traduit cette comparaison d'une grandeur quelconque à l'unité de même espèce.

Examinons ce que peut donner, au point de vue élémentaire, cette comparaison, et bornons-nous à faire cet examen *sous le rapport de la quantité*, en laissant de côté

les rapports de position qui peuvent exister entre une grandeur et son unité. L'expression du résultat ne sera autre chose que la définition arithmétique du nombre.

Sous le rapport de la quantité, il peut se présenter, dans la mesure d'une grandeur, trois circonstances distinctes et pas davantage.

Premièrement, la grandeur peut contenir une ou plusieurs fois exactement l'unité ; le résultat s'exprime par un nombre, qu'on nomme *entier*.

Secondement, la grandeur peut contenir exactement une ou plusieurs fois une partie aliquote finie de l'unité, ce qui s'exprime par un nombre *fractionnaire*.

Troisièmement, la grandeur ne contient pas exactement une ou plusieurs fois l'unité, ni aucune partie aliquote finie de l'unité; évidemment, cette circonstance ne peut pas se traduire par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire. On donne à l'expression de ce dernier résultat le nom de nombre *incommensurable* ou *irrationnel*. Il est d'ailleurs presque indifférent de savoir si ce mot est mal choisi et peut donner lieu à des équivoques; l'important, c'est qu'il soit bien établi que ces circonstances diverses peuvent se présenter toutes les trois, dans la mesure des grandeurs.

Or, il est de toute évidence que les deux premiers cas peuvent se rencontrer; quant au troisième, le raisonnement et l'expérience s'accordent à démontrer qu'il peut se rencontrer comme les deux premiers.

Le raisonnement le démontre; car, l'esprit n'éprouve aucune difficulté à admettre, vu la continuité des grandeurs mathématiques, que l'opération commencée, pour trouver la plus grande commune mesure de deux gran-

deurs, puisse se poursuivre indéfiniment (1). Sans doute, l'imperfection des instruments et d'autres obstacles matériels imposeront des bornes à cette recherche; mais un effort d'esprit des plus simples nous permet d'étendre la vue au delà de ces bornes, et d'affirmer la possibilité de continuer l'opération, si loin qu'on la suppose prolongée. Or, si l'opération de la mesure d'une grandeur peut être, par la pensée, indéfiniment prolongée, l'expression fidèle du résultat de cette mesure ne saurait être un nombre entier, ni un nombre fractionnaire; autrement, la plus grande commune mesure entre cette grandeur et l'unité se trouverait déterminée après un nombre limité d'opérations; donc, le troisième cas que nous avons signalé, dans la mesure des grandeurs, peut se rencontrer aussi bien que les deux premiers.

L'expérience le démontre aussi; il suffit de citer, à l'appui de cette assertion, le résultat auquel on est conduit, quand on mesure la diagonale d'un carré avec le côté de ce carré pour unité, ou la diagonale d'un cube avec l'arête de ce cube pour unité, ou la circonférence d'un cercle avec le rayon du cercle pour unité. Mais, la première preuve, quoique résultant d'une simple conception de l'esprit, est suffisante. Il y a donc bien trois sortes distinctes de nombres, sous le rapport de la quantité; car, il y a trois sortes possibles de résultats à exprimer, dans la mesure des grandeurs.

D'un autre côté, il est hors de doute que, si l'on réserve la qualification de nombre pour le cas où la comparaison d'une grandeur avec l'unité de même espèce aboutit aux deux premiers résultats, le troisième résultat ne mérite

(1) Voy. Ch. Simon. *Précis d'Arithmétique*, page 117.

plus le nom de nombre, puisqu'il est absolument distinct des deux premiers, et l'on est en droit d'énoncer ce paradoxe : *un nombre incommensurable n'est pas un nombre*. De même, si l'on convient de dire qu'un nombre n'existe pas à moins qu'il ne soit composé d'unités ou de parties aliquotes finies de l'unité, on pourra soutenir avec raison que *les nombres incommensurables n'existent pas*. Cette formule est encore, comme la précédente, purement paradoxale. On pourrait aisément aller plus loin, dans cette voie, et dire aussi qu'*un nombre fractionnaire n'est pas un nombre*.

Mais, s'il est tout à fait contraire à l'esprit des mathématiques de restreindre la signification du mot nombre au premier sens de nombre entier, il ne l'est pas moins de penser qu'un nombre n'a d'existence réelle qu'à la condition d'être une agrégation de parties aliquotes finies de l'unité. Un nombre est essentiellement, nous l'avons dit, l'expression du résultat de la mesure d'une grandeur; d'ailleurs, les trois circonstances que nous avons rencontrées et rapportées plus haut, peuvent se produire indifféremment, dans la mesure d'une grandeur, et ces trois circonstances sont distinctes les unes des autres. Il est donc nécessaire qu'il y ait, sous le rapport de la quantité, trois sortes correspondantes de nombres et pas davantage : 1° les nombres *entiers;* 2° les nombres *fractionnaires;* 3° les nombres *incommensurables;* ces derniers n'ayant d'autre qualité générale que celle d'exprimer la mesure d'une grandeur qui n'est pas un multiple de l'unité, ni d'une partie aliquote finie de l'unité, c'est-à-dire d'une grandeur incommensurable avec l'unité.

Remarquons que, dans la mesure des grandeurs, le cas qui se présente le plus généralement, toutes choses

égales d'ailleurs, est précisément le dernier, tandis que les deux autres n'en sont que des accidents. L'existence des nombres incommensurables se trouve liée, en effet, à une propriété caractéristique des grandeurs mathématiques, savoir: la continuité; tandis que les nombres commensurables, résultant tous de cette hypothèse particulière que l'opération entreprise pour la mesure d'une grandeur réussit après quelques essais, ces nombres sont indépendants de cette propriété. D'où l'on conclut que, s'il y a quelque raison d'enlever le nom de nombre à l'un des trois résultats, auxquels peut aboutir la mesure d'une grandeur, c'est plutôt aux deux premiers qu'au troisième qu'on devrait le faire.

Toutefois, on ne saurait oublier que la continuité d'une grandeur est une propriété purement idéale, en ce sens qu'il n'y a pas, dans la nature, de grandeur qui soit matériellement continue. Cette continuité n'existe que dans l'imagination du géomètre, qui attribue, par la pensée, aux corps du monde extérieur des qualités parfaites, que ces corps n'ont pas ou qu'ils ont seulement à un très-faible degré, mais qui lui permettent de simplifier ses recherches et d'en généraliser les résultats. C'est pourquoi, si l'on veut rester dans le véritable esprit de la genèse mathématique, il sera bon de tenir compte de cette observation dans la pratique de l'enseignement, et de graduer, comme on le fait dans beaucoup de théories géométriques, les difficultés de l'étude des nombres.

On commencera l'arithmétique par l'examen des circonstances les plus simples et qui se trouvent dans la nature. La nature nous offre des collections d'objets de même espèce et la répétition du même phénomène : telle sera l'origine de la première définition du nombre.

La définition du nombre, tirée ainsi de l'idée de pluralité et indépendamment de toute idée de mesure, sera maintenue jusqu'à ce que la question de la mesure des grandeurs nous oblige à formuler la définition d'une fraction. Les fractions seront encore appelées des nombres, car l'opération qui leur donne naissance comprend aussi, comme cas particulier, les nombres déjà étudiés auparavant; on les distinguera, d'ailleurs, les uns des autres par les épithètes d'*entiers* ou de *fractionnaires*.

Enfin, si l'on envisage la question de la mesure des grandeurs d'une manière plus générale, on est obligé d'admettre que les nombres entiers et les fractions ne sont que des résultats accidentels dans cette opération, car il y a des grandeurs incommensurables avec l'unité. Or, le résultat de la mesure de ces grandeurs doit pouvoir s'exprimer par un nombre, si l'on veut que l'idée de nombre soit générale. De là, l'origine de toute une nouvelle classe de nombres, qu'on nomme *incommensurables*, et qui représentent de la manière la plus complète l'expression de la comparaison d'une grandeur quelconque avec l'unité de même espèce, sous le rapport de la quantité.

Tel est aussi, à peu près, l'ordre méthodique qui ressort de la disposition adoptée dans les programmes officiels, pour l'enseignement classique des lycées de France (1).

(1) Voyez *Plan d'études*, enseignement secondaire classique, programme 2.

CHAPITRE XV

Définition particulière du nombre incommensurable

La seule qualité générale des nombres incommensurables est d'exprimer la mesure d'une grandeur incommensurable avec l'unité, c'est-à-dire d'une grandeur qui n'est pas un multiple de l'unité, ni d'aucune partie aliquote finie de l'unité. Est-ce à dire que cette qualité, qui correspond à une propriété des grandeurs, en quelque sorte négative, puisse suffire complètement aux besoins du calcul? En aucune façon. Cette qualité est satisfaisante au point de vue théorique de la définition générale des nombres incommensurables, en ce sens, que le mot *incommensurable*, appliqué aux nombres, signifie un résultat possible et précis au même degré que les deux autres; absolument comme il suffit, en géométrie, de définir d'abord et d'une manière générale, une ligne courbe, en disant qu'elle n'est ni droite, ni brisée.

On peut même déduire de cette définition générale, certaines propriétés des nombres, incommensurables ou non, qui en dépendent exclusivement. Ainsi, par exemple,

si deux lignes égales sont incommensurables avec la même unité, les deux nombres qui exprimeront leur longueur sont égaux ; de même, si l'une est plus grande que l'autre, l'un des deux nombres est plus grand que l'autre ; si l'une est un multiple ou une partie aliquote de l'autre, il en est de même des deux nombres. Rien ne s'oppose même à ce qu'on puisse, dans la pratique, renverser les termes d'une semblable proposition et affirmer que, si deux nombres exprimant la mesure de deux grandeurs faite avec la même unité sont reconnus égaux, les deux grandeurs dont il s'agit sont égales, sous le rapport de la quantité. Mais, cette dernière conclusion n'est vraie que comme un fait essentiellement pratique, et ce serait prendre la question à rebours, que de vouloir tirer de ce fait, comme l'ont tenté quelques géomètres, la définition de l'équivalence des grandeurs mathématiques. La théorie de l'équivalence de deux grandeurs est, en principe, totalement indépendante de l'évaluation numérique de ces grandeurs.

Pour faire entrer dans le calcul arithmétique un nombre incommensurable, c'est-à-dire pour en formuler la définition particulière, il faut et il suffit qu'on ait démontré que ce nombre possède une qualité positive et caractéristique, qui permette d'envisager à chaque instant sa composition, par rapport à l'unité, et d'en distinguer tous les autres nombres, sans être obligé de remonter à la comparaison des grandeurs dont la mesure les a engendrés. Cette propriété se trouvera mise en évidence, comme pour les nombres commensurables, par l'analyse des circonstances spéciales qui, dans la mesure des grandeurs, accompagnent la naissance de chaque nombre incommensurable ; le résultat de cette analyse devra être

fixé de telle sorte qu'il ne reste, dans le calcul, aucune trace des grandeurs que les nombres représentent, ni du procédé qui a servi à déterminer leur manière d'être relativement à l'unité.

Analysons ces circonstances, et, pour préciser la démonstration, choisissons comme exemple la racine carrée du nombre 2 : nous serons amenés à formuler pour ce nombre deux sortes de définition.

Première définition. — On fait voir, en arithmétique, qu'il n'y a pas de nombre entier, ni fractionnaire, qui élevé au carré donne 2. Mais, si l'on partage l'intervalle de 1 à 2 en dixièmes, et si l'on fait successivement le carré des nombres : 1; 1,1; 1,2; 1,3; etc.; on en trouve deux consécutifs dont les carrés comprennent entre eux le nombre 2, savoir : 1,4 et 1,5. De même, si l'on partage l'intervalle de 1,4 à 1,5 en centièmes, et si l'on fait successivement le carré des nombres : 1,4; 1,41; 1,42; 1,43; etc.; on en trouve deux consécutifs dont les carrés comprennent entre eux le nombre 2, savoir : 1,41 et 1,42; et ainsi de suite. De telle sorte que le nombre 2 reste compris entre les carrés des nombres correspondants, dans les deux séries :

	(1)	2	1,5	1,42	1,415, etc.
et	(2)	1	1,4	1,41	1,414, etc.

Or, ces deux séries de nombres, satisfont aux trois conditions suivantes :

1° Les premiers vont tous en diminuant; les seconds vont tous en augmentant.

2° Tout nombre de la première série est plus grand que son correspondant dans la seconde.

3° La différence entre deux nombres correspondants peut devenir aussi petite que l'on veut.

Et l'on sait que deux pareilles séries de nombres, dès l'instant que les trois conditions énoncées sont remplies, tendent vers une limite commune; il suffit, pour s'en convaincre de remonter du nombre considéré sous la forme abstraite, à la plus simple des grandeurs concrètes que le nombre peut représenter (chap. XI).

Il en est de même des deux séries :

	(3)	2^2	$1,5^2$	$1,42^2$	$1,415^2$,	etc.
et	(4)	1^2	$1,4^2$	$1,41^2$	$1,414^2$,	etc.

Ces deux séries de nombres satisfont évidemment aux deux premières conditions énoncées; elles satisfont aussi à la troisième. En effet, la différence des carrés de deux nombres est égale à la somme de ces nombres multipliée par leur différence; or, la somme de deux nombres correspondants est toujours inférieure à 4, et leur différence peut devenir aussi petite que l'on veut, comme on le voit dans les premières séries (1) et (2); donc, les séries (3) et (4) tendent vers une limite commune. D'ailleurs, le nombre 2 reste compris entre deux termes correspondants de ces mêmes séries; le nombre 2 est donc la limite vers laquelle tendent les termes de ces deux séries.

On peut conclure de ce qui précède, qu'il existe une limite vers laquelle tendent les nombres décimaux, dont les carrés ont eux-mêmes pour limite le nombre 2; puisque cette limite existe, et qu'elle est d'ailleurs indépendante de la forme décimale que nous avons adoptée pour les termes des séries considérées, on pourra nommer

cette limite *racine du nombre* 2, l'écrire $\sqrt{2}$ et introduire cette expression $\sqrt{2}$ dans les calculs, en la regardant toujours comme définie, par cette propriété d'être la *limite vers laquelle tendent les nombres fractionnaires dont les carrés ont pour limite le nombre* 2.

Deuxième définition. — Il est naturel de se demander pourquoi, la racine de 9 étant le nombre qui élevé au carré donne 9, la racine de 2 n'est pas définie de la même manière ? Pour qu'on fût en droit de garder pour le second cas la même définition que pour le premier, il suffirait de démontrer qu'il existe un nombre qui, élevé au carré, donnerait le nombre 2, comme il y en a un qui élevé au carré donne 9. Or, si l'on se rappelle qu'un nombre quelconque exprime la mesure d'une grandeur, d'une ligne par exemple, et si l'on sait ce qu'il faut entendre par l'existence d'un nombre, il est certain qu'il y a une longueur, quelle que soit l'unité choisie, dont le carré est plus petit que 2, et une autre dont le carré est plus grand ; par conséquent, si l'on suppose que la longueur d'une ligne aille en croissant continuellement, depuis la plus petite des deux jusqu'à la plus grande, il y aura, en vertu de cette continuité même, une longueur intermédiaire dont le carré sera précisément égal à 2. C'est le nombre exprimant la mesure de cette longueur, lequel existe (Chap. XIV), qu'on appellera *racine de* 2, qu'on écrira $\sqrt{2}$ et qu'on introduira dans les calculs, en le regardant toujours comme défini par cette propriété d'être *le nombre qui élevé au carré donnerait* 2.

CHAPITRE XVI

Choix de la définition des nombres incommensurables.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la racine d'un nombre qui n'est pas carré parfait peut être définie, comme limite de nombres fractionnaires satisfaisant à certaines conditions, ou comme jouissant de cette propriété que son carré doit reproduire le nombre considéré.

Si l'on se reporte aux conditions générales et particulières d'une bonne définition géométrique (chap. IV), on reconnaîtra sans peine qu'il est permis, en toute rigueur, de choisir celle qu'on veut de ces deux définitions, pourvu qu'on l'ait auparavant justifiée par une démonstration. En adoptant la première, il sera nécessaire de s'y tenir attaché exclusivement, dans la suite des calculs, ce qui entraîne des longueurs de raisonnement, à moins qu'on ne démontre une fois pour toutes que cette limite possède la propriété qui sert de seconde définition. En choisissant la seconde, on évitera l'inconvénient des longueurs ; mais on sera forcé, dans les applications numé-

riques, de remplacer finalement une racine quelconque par le résultat de sa décomposition en unités décimales de différents ordres. Sous le rapport de l'économie des propositions, il n'y a donc aucun avantage à préférer l'une à l'autre ; on pourrait même, sans pêcher contre la rigueur, comprendre sous une seule définition les deux qualités distinctes que nous avons étudiées séparément.

Mais, sous le rapport de l'enseignement, on ne saurait, après avoir défini la racine de 9 comme étant *le nombre dont le carré est égal à* 9, trouver naturel de définir celle de 2 comme la limite vers laquelle tendent les nombres fractionnaires dont le carré a pour limite 2. Cette vue est exacte, arithmétiquement parlant, on ne saurait le contester, mais trop peu simple et trop peu naturelle pour servir de définition ; et, puisqu'elle est d'ailleurs indispensable aux développements du calcul numérique, ce sera sous forme de considération, sous forme de théorème, que cette manière de voir trouvera la place qui lui convient, à la suite de la théorie de l'extraction des racines.

C'est ainsi qu'on procède (chap. IX) dans l'étude de la circonférence et du cercle, et, en général, dans l'étude des lignes courbes, avec cette différence que, la théorie des racines se présentant tout d'une pièce dans les programmes d'enseignement, il peut y avoir des inconvénients moindres à en intervertir les définitions et les propositions, en même temps que les auteurs éprouvent une plus forte tentation de le faire.

C'est ainsi qu'on procède également, en définitive, dans l'étude des nombres fractionnaires. Il ne vient à l'esprit de personne, à moins d'être exclusivement tourné vers des idées d'utilité pratique, de faire passer la définition

et l'étude des fractions décimales, avec le cortège de leurs périodes, avant celle des fractions ordinaires. Toutes ces analogies entre les différentes parties du cours de mathématiques doivent, autant que possible, être maintenues.

Le développement d'une racine en fraction décimale, fait ainsi après coup, pourra donner lieu à des rapprochements curieux.

On sait que tout nombre commensurable peut s'écrire sous la forme de fraction décimale, à la manière des nombres incommensurables. Ainsi, par exemple, le nombre 1 peut s'écrire : 0,999....; le nombre $\frac{3}{4}$ peut s'écrire: 0,75 ou 0,74999:...., et cette représentation décimale n'est qu'un cas particulier de la représentation plus générale d'un nombre fractionnaire quelconque sous la forme de progression géométrique décroissante.

Mais, d'une part, l'expression décimale d'un nombre entier ou fractionnaire diffère essentiellement de celle d'un nombre incommensurable, en ce que la première n'a qu'un nombre limité de chiffres, ou que, si elle en a un nombre illimité, cette expression est caractérisée par une certaine périodicité dans les chiffres, qui manque absolument dans la seconde; d'autre part, cette analogie de forme, dans le calcul numérique, démontre *à posteriori* l'existence théorique des trois sortes de nombres que nous avons constatées (chap. XV), et la nature toute accidentelle et particulière de ceux qui appartiennent aux deux premières catégories, c'est-à-dire des nombres commensurables.

Cette analogie de forme se poursuit encore au point de vue général de l'algèbre. Tout nombre commensurable a, pour les besoins du calcul algébrique, une repré-

sentation brève, résumée par un chiffre ou par un petit nombre de chiffres, avec un signe; cette forme simple, qui se prête beaucoup mieux aux transformations du calcul que la forme décimale, se montre à l'origine même de chaque nombre commensurable, et n'est autre chose que la sténographie de sa définition; elle équivaut, d'ailleurs, à la décomposition, décimale ou non, du nombre en une infinité de chiffres.

Il en est exactement de même des nombres incommensurables, si on les introduit dans le calcul à l'aide de la seconde définition : la racine de 2, par exemple, peut être représentée numériquement par une suite indéfinie de chiffres décimaux; mais cette racine aura aussi sa forme brève, résumée par un chiffre et un signe, laquelle apparaît en même temps que le nombre, équivaut à la première et se prête infiniment mieux qu'elle aux transformations algébriques. On lui donne un corps en écrivant $\sqrt{2}$, et, en disant que c'est le nombre dont le carré est égal à 2, on énonce à la fois sa qualité générale de nombre incommensurable et sa qualité particulière, qui suffit aux transformations algébriques, d'avoir pour carré le nombre 2.

Sans doute, cette définition n'a pas l'avantage de rappeler la série des opérations successives qu'il faut faire sur l'unité, pour composer la racine du nombre; mais, pourvu qu'il ait été établi que cette composition est possible, quels que soient le nombre, la nature et l'ordre des opérations nécessaires, il est permis de prendre le résultat de ces opérations, fussent-elles purement idéales, pour objet d'une définition.

Au surplus, l'objection peut être faite à la première définition avec autant de force qu'à la seconde; si loin

qu'on considère les termes de la série : 1 1,4 1,41 1,414.... il faudra absolument s'arrêter à un terme, dans cette énumération, et ce n'est que par une simple vue de l'esprit qu'on pourra atteindre la limite vers laquelle ils tendent. En dernière analyse, prendre cette limite pour définition, après avoir prouvé qu'elle existe, c'est encore accepter, quoi qu'on dise, le résultat d'une opération de l'esprit comme existant *à priori*.

Ce qu'il n'est pas permis de faire, c'est de fixer sa pensée, soit sur un terme, soit sur un autre de la série, et de considérer ce terme, quel qu'il soit, comme étant le dernier : évidemment, aucun de ces termes n'exprime la mesure de la grandeur qui doit être représentée par leur limite ; aucun d'eux ne jouit de la propriété que son carré soit égal à 2 ; aucun d'eux ne saurait être assimilé à $\sqrt{2}$. Croire que la définition d'une racine, comme limite, repose sur des données expérimentales, plus positives et plus certaines que celles de l'esprit, est donc une erreur complète.

Il ne faut pas se dissimuler, d'ailleurs, le peu de ressource qu'offre l'expérience dans une pareille question. L'expérience ne donne ni un point, ni une ligne, ni une surface, ni aucune figure géométrique ; elle ne nous présente que des corps. Comme ces corps sont nécessairement terminés, sans quoi ils ne seraient pas distincts de l'espace indéfini, nous concluons que leurs limites existent, et nous appelons ces limites surfaces : mais c'est en vertu d'une opération de l'esprit, c'est-à-dire d'une abstraction, que nous affirmons leur existence mathématique. Ces surfaces elles-mêmes ont des limites, que nous concevons et que nous nommons *lignes ;* enfin, ces lignes elles-mêmes ont des limites, que nous appelons

points. Mais, l'œil de l'homme n'a jamais vu un point, ni une ligne, ni une surface géométrique, pas plus que la limite vers laquelle tendent les nombres fractionnaires dont les carrés ont eux-mêmes pour limite le nombre 2.

L'existence de cette limite et de ces figures, toute incontestable qu'elle est, nous est donc uniquement démontrée comme résultat d'une opération de l'esprit, et nullement comme donnée expérimentale. L'application du calcul ou d'un instrument à la mesure de ces grandeurs, et à la recherche de cette limite, est un moyen d'en matérialiser les propriétés, de les faire passer sous les sens, de les rendre en quelque sorte tangibles. Mais, tandis que, par la pensée, nous concevons facilement et pleinement l'existence de ces grandeurs et de leurs propriétés mathématiques, nous ne pouvons espérer de les représenter, par le calcul ou à l'aide d'un instrument, que d'une manière ordinairement imparfaite, et d'une manière exacte seulement dans des cas particuliers.

C'est donc tout à fait à tort que quelques géomètres estiment qu'il faille absolument prendre, comme point de départ d'une définition, le résultat d'un calcul ou d'une opération matérielle. Cette manière de procéder ne laisse pas que d'être rigoureuse, sans doute ; mais les résultats auxquels une opération de l'esprit nous conduit, en partant de l'expérience, sont aussi vrais, aussi certains, aussi indiscutables que les résultats de l'expérience même, et en outre, ils ont un caractère de simplicité et de généralité, qui manque forcément aux autres, et dont la disparition engendre des difficultés incessantes et sans nombre dans l'enseignement des mathématiques.

CHAPITRE XVII

Définitions expérimentales.

Nous avons dit, dans le chapitre précédent, que l'expérience offre peu de ressources dans la question générale des définitions géométriques, et que c'est une erreur de croire que les sens seuls puissent nous fournir une bonne définition. Toutes les notions que les sens nous donnent ont besoin d'être étendues, développées et complétées, en mathématiques, par une conception pure, et il n'est pas rare de voir que les meilleurs esprits, une fois engagés dans la voie expérimentale, où tout est borné et rétréci, soient obligés, pour aller jusqu'au bout, de subir les conséquences de l'erreur qui les y a entraînés. Rien n'est plus à la mode, dans les traités modernes, que les affirmations du genre suivant :

« *On ne considère, en mathématiques, que les grandeurs dont on a défini avec précision l'égalité et l'inégalité.* »

« *Il n'est pas nécessaire de définir les grandeurs qu'on introduit dans le calcul mathématique ; il suffit d'avoir défini leur égalité et leur inégalité.* »

On comprend que la définition d'une grandeur mathématique soit chose difficile, et même impossible à faire d'une manière purement expérimentale; mais quel est l'élève de philosophie qui consentira à raisonner sur des grandeurs, sans savoir ce que c'est? quel est celui qui voudra admettre qu'une grandeur, non définie, est égale à une autre qui ne l'est pas davantage? La première phrase qui commencera par ces mots : « les deux *grandeurs* sont dites égales, etc. » contiendra pour lui une pétition de principe inexplicable et des plus choquantes, si l'on n'a pas déjà posé et justifié la définition de ces deux grandeurs.

Voici un traité d'arithmétique, où l'on trouve à six pages de distance les deux définitions suivantes:

« *On appelle racine carrée d'un nombre un nombre qui élevé au carré reproduit le nombre proposé.* »

« *Chacun des nombres fractionnaires qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on veut, et dont les carrés comprenant A est ce que l'on appelle la racine carrée de A; on le désigne par le symbole* $\sqrt{A}$. »

Quelle est la bonne? Un nombre qui représente l'évaluation approchée d'une grandeur, ne peut pas être pris, sans erreur, pour celui qui exprime la mesure exacte de cette grandeur. Evidemment, on joue ici sur les mots, en cherchant à identifier une sorte d'égalité par approximation avec l'égalité absolue: l'une de ces égalités est théorique, mais vraie; l'autre est expérimentale et fausse.

On rencontre aussi, au début d'un traité d'algèbre, cette définition générale du nombre incommensurable :

« *Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un nombre incommensurable.* »

On ne fera jamais croire à personne qu'un nombre fractionnaire, quel qu'il soit, puisse s'appeler incommensurable, à moins d'une parfaite contradiction, et le contraire d'une pareille proposition est aussi rigoureusement vrai que la proposition même. On devine, il est vrai, que l'auteur a en vue de considérer seulement la *limite* dont il ne fait pas mention, et vers laquelle tend le nombre fractionnaire dont il parle. Mais, une semblable définition ressemble trop à un rébus, pour être acceptée en ces termes dans l'enseignement élémentaire.

Dans un *Précis d'arithmétique*, on peut lire la définition suivante de la mesure d'une grandeur :

« *Mesurer une grandeur, c'est chercher de quelle manière elle est composée avec son unité; en d'autres termes, c'est chercher combien il faut ajouter d'unités ou de parties déterminées de l'unité pour reproduire cette grandeur.* »

Cette définition est incomplète, car l'auteur a démontré auparavant, comme nous l'avons fait (chap. XIV), qu'il peut se présenter trois cas distincts dans la mesure d'une grandeur, et sa définition n'en comprend que deux.

Les ouvrages modernes, du moins ceux qui se voient dans les bibliothèques de collége, renferment un très-grand nombre de définitions expérimentales de ce genre, où les auteurs, sous prétexte d'excessive rigueur, arrivent à formuler, en tourmentant la langue française, deux difficultés au lieu d'une. Il serait bien préférable, pour les progrès de l'enseignement, que les hommes distingués qui s'occupent d'écrire les éléments des sciences, apportassent toutes leurs préoccupations à suivre l'ordre logique des idées, et laissassent de côté les tours

de force pour ne poser d'abord que des définitions simples, générales, accessibles à tout le monde, sauf à les préciser dans un traité à part, par quelque développement ingénieux et même paradoxal, si cela leur plaît.

CHAPITRE XVIII

Définition des opérations de l'Arithmétique.

Le but de ce chapitre est d'examiner si l'on peut trouver, pour chaque opération de l'Arithmétique, une définition précise qui satisfasse à toutes les conditions générales et particulières d'une bonne définition, et de formuler cette définition.

Nous nommerons opération d'arithmétique toute combinaison de nombres, dont l'existence aura été démontrée comme possible et unique, et nous entendrons par nombre l'expression du résultat de la comparaison, sous le rapport de la quantité, d'une grandeur avec l'unité de même espèce (chap. XIV).

Rappelons d'abord que l'apparition d'un nombre, d'après sa définition même, suppose déjà l'existence d'une grandeur mathématique soumise à une opération simple, qu'on nomme sa mesure. S'il n'y avait pas de grandeurs mathématiques, il n'y aurait pas de nombres, même pour le savant, tandis que les grandeurs mathématiques existent même pour celui qui n'a pas l'idée de nombre. L'emploi des nombres tire principalement son utilité de ce que ceux-ci ne conservent pas la trace des

grandeurs qui leur ont donné naissance; d'où il résulte que les combinaisons qu'on peut en faire, et les conséquences qu'on tire de leurs combinaisons, ont un certain degré de généralité, qui permet de les appliquer à toutes les espèces de grandeurs et que ne sauraient avoir les opérations effectuées directement sur les grandeurs mêmes.

On est ainsi conduit à regarder une combinaison de nombres ou opération arithmétique comme l'image fidèle, mais incolore, d'une opération correspondante sur les grandeurs; et, par contre, puisque toute trace de l'espèce des grandeurs a disparu dans le nombre, il est permis de supposer que cette espèce est celle qu'on veut, et, en particulier, que ces grandeurs sont des lignes. D'où l'on tire cette double conclusion incontestable, savoir: 1° tous les nombres arithmétiques, incommensurables ou non, peuvent être censés représenter des longueurs portées sur une même droite, à partir du même point et dans la même direction; 2° toute opération arithmétique est, si l'on peut s'exprimer ainsi, la photographie d'une construction géométrique, exécutée sur des lignes.

La définition d'une opération arithmétique a donc pour objet de faire connaître et de fixer par un mot le résultat d'une combinaison de nombres, c'est-à-dire d'une construction géométrique. On voit par là qu'il y a pour chaque opération deux modes de définition, qu'on distingue quelquefois et très-improprement par les épithètes d'*abstrait* et de *concret*, et qu'on devrait plutôt nommer *arithmétique* et *géométrique*.

Le mode abstrait ou arithmétique, est celui dans lequel on fait porter la définition sur les nombres, tels qu'ils se rencontrent dans la pratique du calcul, c'est-à-dire abs-

traction faite de l'espèce de grandeurs qu'ils représentent et de la position relative de ces grandeurs ; cette manière de procéder est nécessairement particulière et incomplète, car elle suppose que les nombres sont considérés uniquement sous le rapport de la quantité.

Au contraire, dans le mode géométrique ou concret, la définition prend naissance sur des lignes, qui remplacent figurativement toute espèce de grandeurs ; rien n'empêche qu'on ne puisse tenir compte et de la quantité et de la position relative de ces lignes, non-seulement dans un sens, mais encore dans le sens opposé et même dans une multitude de directions intermédiaires ; la définition géométrique d'une opération, outre qu'elle est plus saisissante, plus naturelle et plus simple que l'autre, est donc la seule qui soit *à priori* susceptible de généralisation.

En suivant cet ordre d'idées, il est très-facile d'entendre les termes de *quantités algébriques* et de *quantités complexes*, que quelques géomètres modernes ont introduit dans le calcul. Ces termes n'ont rien d'absolu ; mais, de même qu'on rattache successivement au mot nombre, sous le rapport de la quantité, des idées de plus en plus générales, que rappellent les épithètes d'entier, de fractionnaire et d'incommensurable, de même il est permis de généraliser aussi l'expression de nombre, lorsqu'on le considère sous le rapport de la direction. Les nombres se présentent d'abord comme quantités *arithmétiques,* c'est-à-dire essentiellement positives, puis comme quantités *algébriques*, c'est-à-dire positives ou négatives, et enfin comme quantités *dirigées* ou *inclinées* dans tous les sens ; c'est cette dernière manière d'être qu'on doit entendre par le terme de *quantités complexes*.

L'idée de direction attachée au mot nombre sert ainsi

de ligne de démarcation entre l'arithmétique et l'algèbre : l'arithmétique se compose de faits relatifs aux nombres, car les nombres n'y sont jamais combinés autrement que sous le rapport de la quantité ; l'algèbre, au contraire, envisageant les nombres sous le double rapport de la quantité et de la direction, exprime les lois générales de leurs combinaisons. Et l'on ne peut s'empêcher de croire que telle était la pensée de Newton, lorsqu'il choisissait pour titre de son traité d'algèbre, celui d'*Arithmétique générale* ou *universelle*.

L'opération fondamentale de l'arithmétique est l'addition : on peut dire qu'elle consiste à former un nombre renfermant toutes les unités et parties aliquotes d'unité, qu'on peut trouver dans plusieurs nombres donnés. Si les nombres donnés sont entiers ou fractionnaires, on ne saurait élever d'objection contre la possibilité de former un pareil nombre. Si l'un des nombres donnés est incommensurable, comme $\sqrt{2}$, ou si tous sont incommensurables, nous avons vu comment on doit considérer, dans la pratique, la composition du nombre $\sqrt{2}$ relativement à l'unité (chap. XV); d'après cela, il sera possible de former un nombre renfermant toutes les unités et parties aliquotes d'unité qu'on sait trouver successivement dans des nombres donnés, entiers, fractionnaires ou incommensurables. Que si nous voulons indiquer la limite exacte du résultat de l'addition des nombres 3 et $\sqrt{2}$, laquelle ne peut pas s'exprimer par un nombre commensurable, nous écrirons $3 + \sqrt{2}$. Telle est la *somme* de ces nombres.

La soustraction se ramène à l'addition dont elle est l'inverse.

La multiplication par un nombre entier est un cas particulier de l'addition, celui où les nombres additionnés

sont égaux entre eux. De la multiplication par un nombre entier, on peut passer à la division par un nombre entier, en disant que, diviser un nombre par un autre, c'est *partager le premier en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le second*, ce qui est toujours possible, en vertu de la continuité des grandeurs que les nombres représentent. On définit ensuite la multiplication par un nombre fractionnaire ou incommensurable, à l'aide des deux définitions précédentes, savoir : *multiplier un nombre quelconque par un autre, c'est en former un troisième qui soit composé avec le multiplicande absolument comme le multiplicateur l'est avec l'unité.*

Dans le cas où le multiplicateur est fractionnaire, on reconnaît aisément la justesse de cette définition, qui comprend comme cas particulier, celle qu'on a déjà donnée spécialement pour les nombres entiers. Si le multiplicateur est incommensurable, comme $\sqrt{2}$, on sait comment il faut considérer, dans la pratique, la composition du nombre $\sqrt{2}$ relativement à l'unité (chap. XV); on saura donc former un nombre renfermant autant de parties aliquotes du nombre 3, par exemple, que l'on peut trouver successivement de parties aliquotes de l'unité dans $\sqrt{2}$. Que si nous voulons indiquer la limite exacte du résultat de la multiplication des nombres 3 et $\sqrt{2}$, laquelle ne peut pas s'exprimer par un nombre commensurable, nous écrirons $3 \times \sqrt{2}$. Tel est le produit de ces nombres.

La définition générale du produit de deux nombres entraîne celle de la division, qui est l'inverse de la multiplication; d'ailleurs, l'élévation d'un nombre à ses puissances entières n'est qu'un cas particulier de la multiplication, et l'extraction des racines l'inverse de

l'élévation aux puissances. D'un autre côté, on peut toujours se proposer de satisfaire aux deux questions suivantes : 1° *étant donnés deux nombres, en trouver un troisième qui multiplié par le second reproduise le premier ; 2° étant donné un nombre, en trouver un second qui élevé à une certaine puissance reproduise le premier*. Il résulte, en effet, de la continuité des grandeurs mathématiques, que le nombre cherché dans l'une et l'autre opération existe et est unique, ce qui suffit à la justification de ces deux définitions (chap. XV).

Toutes les opérations de l'Arithmétique peuvent donc être définies, d'une manière abstraite, comme il suit :

ADDITIONNER plusieurs nombres, c'est en former un autre, qui contienne toutes les unités et parties aliquotes d'unité qu'on peut trouver dans les nombres donnés.

SOUSTRAIRE un nombre d'un autre, c'est en trouver un troisième, qui ajouté au second donne une somme égale au premier.

MULTIPLIER un nombre par un autre, c'est en former un troisième, qui soit composé avec le premier absolument comme le second l'est avec l'unité.

DIVISER un nombre par un autre, c'est en trouver un troisième, qui multiplié par le second donne un produit égal au premier.

EXTRAIRE la racine d'un nombre, c'est en trouver un autre, qui élevé à une certaine puissance donne un résultat égal au premier.

Les définitions qui précèdent reposent chacune sur un principe, évident ou démontré, et sur la composition d'un nombre quelconque relativement à l'unité ; elles sont donc toutes, au point de vue purement arithmétique, rigoureuses et générales, attendu qu'elles conviennent à toute

espèce de nombres, sous le rapport de la quantité, et possèdent les qualités générales et particulières d'une bonne définition géométrique. Bien plus, si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut sur l'expression géométrique du nombre, et si, en se conformant au principe de chaque opération, on interprète mot à mot leur signification, on obtiendra sans peine les définitions géométriques ou concrètes des opérations arithmétiques.

Par exemple, pour faire l'addition de deux longueurs, on les portera sur la même droite, l'une à la suite de l'autre : leur *somme* est la distance des deux extrémités non communes.

Pour faire la soustraction de deux longueurs, on les portera sur la même droite, à partir du même point : leur *différence* est la distance des deux extrémités non communes.

La *multiplication* de deux nombres sera représentée par la construction d'une quatrième proportionnelle à trois lignes; on voit, en effet, si l'on pose l'égalité :

$$x = ab,$$

qu'on peut l'écrire sous forme de proportion de la manière suivante :

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}.$$

Or, cette proportion exprime précisément que x est une quatrième proportionnelle aux trois lignes : 1, a et b.

La *division* de deux nombres s'effectue aussi par la construction d'une quatrième proportionnelle; car, le quotient $\frac{a}{b}$ étant désigné par x, on pourra déterminer x par la proportion :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{x}.$$

L'*élévation* aux puissances entières se ramène à plusieurs constructions successives de quatrième et troisième proportionnelles.

L'*extraction* de la racine carrée d'un nombre correspond à la construction d'une moyenne proportionnelle entre l'unité et le nombre donné ; car l'égalité $x = \sqrt{a}$ peut évidemment s'écrire, comme on le sait :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{a}.$$

Les racines, dont le degré est une puissance de 2, peuvent s'extraire par plusieurs constructions successives de moyennes proportionnelles. Quant à celles dont le degré n'est pas une puissance de 2, on peut toujours les trouver approximativement, dans la pratique, avec la règle et le compas, et exactement, en théorie, au moyen de l'instrument imaginé par Descartes.

Telles sont les constructions géométriques propres à représenter les opérations élémentaires de l'arithmétique. Ce qui est vraiment remarquable, c'est que chacune d'elles est susceptible d'être généralisée, c'est-à-dire étendue à des lignes représentant des nombres avec toutes les qualités comprises sous les termes de *quantités algébriques*, et de *quantités complexes* (1). Mais, cette extension n'est point passée dans l'enseignement classique des lycées de France ; ni dans les examens qui ont pour but l'obtention d'un grade universitaire, ni dans les examens d'admission aux différentes écoles du gouvernement, ces définitions généralisées ne sont encore acceptées sans difficulté. Il y a plus de 20 ans qu'elles ont

(1) Voy. à ce sujet les *Mémoires* de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux (1er cahier, 1867).



reçu leur droit de cité dans les écoles de Belgique et d'Allemagne, sans qu'on ait osé les introduire dans les programmes officiels de l'Empire français.

L'historique de ces définitions nous offre cependant en leur faveur, et sans sortir de France, le témoignage de plusieurs savants de premier ordre.

En 1637, Descartes posa les premiers fondements de la signification géométrique des quantités négatives.

Après lui, d'Alembert essaya, dans l'*Encyclopédie* du XVIIIe siècle d'interpréter dans le même sens les quantités imaginaires.

En 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*.

Vers l'année 1813, le même Argand réclame, dans les *Annales de Gergonne* (tome IV), contre un professeur de l'Ecole d'artillerie à Metz, nommé J.-F. Français, la priorité de sa découverte.

Mourey, en 1828, publia une brochure ayant pour titre : *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédié aux amis de l'évidence*.

Ces diverses théories ont été reprises et coordonnées par l'illustre Cauchy, dans ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique*.

Sous le règne de Louis-Philippe, un professeur obscur d'un collége communal, M. Faure, publia un petit ouvrage très-remarquable, intitulé : *Théorie des quantités imaginaires*. J'ai entendu raconter que l'année suivante, les inspecteurs généraux de l'Université déclarèrent que ce professeur était fou, et obtinrent sa mise à la retraite. Ajoutons, pour être juste, que la pension de retraite du

pauvre professeur a été augmentée, depuis cette époque, et que les distinctions les plus honorables ont été accordées sous forme de réparation à ce savant méconnu.

Depuis 15 ans, plusieurs mémoires ont été lus sur la question, par M. Abel Transon, examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique, dans les séances de la *Société philomatique de Paris*, et d'autres, imprimés par lui, dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (années 1868-69, décemb., janv., fév., etc.).

Enfin, M. J. Houël, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux, publie en ce moment même, sous le titre de *Théorie élémentaire des quantités complexes*, une étude des plus approfondies et des plus savantes de la question.

Malgré toutes ces autorités, le droit d'étendre les définitions arithmétiques aux quantités négatives et imaginaires reste encore, par routine ou par frayeur, contesté de la part de plusieurs géomètres français. Mais la routine finira, soyons-en sûrs, par être vaincue; la peur cèdera à l'évidence, et, sans être prophète, nous pouvons prédire que, dans un prochain avenir, le fantôme des imaginaires aura disparu des écoles françaises, comme autrefois les loups furent chassés d'Angleterre.

FIN DES DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

TABLE DES MATIÈRES

Lyon — Imp. du Salut Public. — BELLON, rue Impériale, 33.

ESSAI

SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

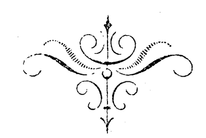
(DEUXIÈME PARTIE)

DÉFINITIONS SPÉCIALES

PAR

J.-F. BONNEL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ NATIONALE D'ÉDUCATION
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ D'ÉMULATION D'ABBEVILLE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE DE LYON
ETC., ETC., ETC.



PARIS
CH. DELAGRAVE ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
58, RUE DES ÉCOLES, 58

1874

ESSAI

SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

ESSAI

SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

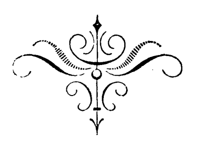
(DEUXIÈME PARTIE)

DÉFINITIONS SPÉCIALES

PAR

J.-F. BONNEL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ NATIONALE D'ÉDUCATION
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ D'ÉMULATION D'ABBEVILLE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE DE LYON
ETC., ETC., ETC.



PARIS
CH. DELAGRAVE ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
58, RUE DES ÉCOLES, 58

1874

PRÉFACE

La première partie de ces Essais avait pour objet l'étude des *Définitions générales* de la géométrie ; la deuxième partie, que je livre au public, est consacrée tout entière aux *Définitions spéciales*.

Les définitions spéciales, dont il est question, sont celles de la ligne droite, du plan et de l'infini ; ces définitions sont examinées au point de vue des règles ordinaires de rigueur, qui se trouvent établies dans certains chapitres de l'ouvrage.

La ligne droite est considérée comme intimement liée à l'idée de distance.

La définition du plan renferme quelques aperçus nouveaux, fondés sur la même idée de distance.

L'infini est présenté comme impossible à remplacer par l'indéfini.

Chemin faisant, je relève plusieurs paralogismes, qui sont presque acceptés aujourd'hui pour de la monnaie courante ; je les signale à la logique des géomètres attentifs, convaincu que, dans l'école des mathématiques, la raison doit toujours avoir une place d'honneur.

En 1870, j'avais demandé un peu plus de géométrie chez les philosophes. D'un côté, le Conseil supérieur de l'Instruction publique a répondu à ma demande, en scindant l'examen du baccalauréat ès-lettres, pour fortifier les études philosophiques dans les lycées ; d'un autre côté, j'ai pu lire, depuis cette date, plusieurs thèses très-remarquables de philosophie mathématique. Il semble donc que la philosophie soit entrée dans une bonne voie.

J'émis le vœu, à la même époque, qu'on reculât la limite d'âge pour l'admission aux Ecoles du Gouvernement. De gré ou de force, la réforme s'est faite provisoirement pour l'Ecole Polytechnique.

Ces mesures en appellent d'autres, qui les complètent, et que le bon sens fera éclore. En attendant, je recommande à qui de droit les deux suivantes : 1° adopter définitivement le chiffre de 21 ans, comme limite de l'âge d'entrée aux Ecoles ; 2° diviser l'examen du baccalauréat ès-sciences, comme on a divisé celui du baccalauréat ès-lettres, et faire que la deuxième moitié du baccalauréat ès-lettres soit la première du baccalauréat ès-sciences. Tout le monde y gagnera.

La publication de ces ESSAIS m'a valu déjà de nombreuses marques d'approbation et de nombreuses critiques, dont j'ai pris note. J'en remercie les auteurs, et les prie tous de recevoir ici l'expression de ma reconnaissance.

CHAPITRE I

Définitions spéciales de la Géométrie

Qu'est-ce qu'une ligne droite? Qu'est-ce qu'un plan? Qu'est-ce que l'infini? Dans tous les temps, les géomètres se sont beaucoup préoccupés de ces questions; et l'on ne peut se dissimuler qu'une bonne réponse à des questions si simples soit pourtant difficile à trouver.

Précisément parce que la ligne droite, le plan et l'infini font leur apparition au début même de la science, le géomètre n'a qu'un très-petit nombre d'éléments à sa disposition, pour formuler ces premières définitions : il ne peut rien emprunter à la doctrine, qu'il a en vue d'exposer, sans courir le risque de faire un cercle vicieux; d'un autre côté, l'expérience seule ne peut lui fournir des données suffisantes, puisqu'il s'agit des premières notions d'une science toute composée d'abstractions. C'est donc uniquement dans les définitions générales de l'étendue, déjà établies, et dans de nouvelles conceptions de la raison, faites exprès, que peut se trouver la justification exacte de ces définitions spéciales de la géométrie.

Les définitions générales de l'étendue, il ne faut pas l'oublier, ont pour base une ou plusieurs opérations de l'esprit, aboutissant toutes à une figure dont l'existence n'a rien de matériel et qui pourtant est certaine. Les mots *volume, surface, ligne, point*, ne sont autre chose que des termes imaginés pour remplacer avantageusement, dans le langage scientifique, la longue périphrase par laquelle on est amené à se représenter mentalement et avec précision chacun de ces genres de figures géométriques (1).

Or, ces définitions générales, qui servent d'introduction à l'étude de la géométrie, en entraînent d'autres, qui sont spéciales, en ce sens qu'elles s'appliquent à des figures constituant une espèce dans le genre. On les forme d'ailleurs très-simplement en ajoutant un qualificatif au terme employé pour la définition générale : c'est ainsi qu'on obtient la *ligne droite*, dans le genre ligne; la *surface plane*, dans le genre surface; et l'*infini*, dans les trois genres, ligne, surface, volume.

Mais, on se tromperait étrangement si l'on croyait que les deux mots « ligne droite » doivent avoir la propriété de faire naître, dans l'esprit de celui qui les entend associer pour la première fois, la vue de toutes les qualités d'une ligne de cette espèce. Les définitions géométriques ne précèdent jamais l'apparition des figures, qu'il s'agit d'étudier; elles la suivent, au contraire, et la fixent. Ce n'est qu'après avoir démontré qu'une figure est *possible* et *unique*, qu'il est permis de résumer par un mot le résultat de cette démonstration, et de regar-

(1) *Essai*, 1re partie, chap. VII.

der conventionnellement ce mot comme l'équivalent ou comme la définition de la figure (1).

Ce mot conventionnel, toutes les fois qu'il sera employé dans le discours, réveillera, dans l'esprit de ceux qui en connaissent la valeur, l'idée des propriétés contenues dans la figure, telle qu'elle a été envisagée pour les besoins de la définition, mais pas une de plus. Dans l'esprit des autres, il ne correspondra à l'image précise d'aucune réalité. Il sera donc, pour le public, je ne dis pas une lettre morte, mais un terme vague, exprimant une vérité de sentiment plutôt que la fin d'une découverte raisonnée ; rien n'est plus légitime toutefois que son emploi dans le langage ordinaire de la vie, pourvu qu'on ne veuille lui donner une signification précise, qu'il n'a pas ou que seuls connaissent les hommes initiés à la science.

Sans doute, toute les propriétés d'une figure sont implicitement renfermées dans sa définition, si celle-ci est bien faite, même celles qui ne concourent pas à l'œuvre de cette définition ; mais, ces dernières s'y trouvent simplement en germe, et n'en peuvent sortir que par la force du raisonnement, à peu près comme les pommes sont dans les fleurs du pommier, et en sortent par le travail de la végétation. Or, je ne pense pas que l'on puisse donner le goût de la pomme à celui qui ne l'a point, en lui faisant contempler le plus fleuri des pommiers : il faudra certainement quelque chose de plus.

La définition de la ligne droite, celle du plan et celle de l'infini, sont en cela comme toutes les autres définitions de la géométrie ; elles n'expriment pas la totalité

(1) *Essai*, 1re partie, chap. IV.

des idées que ces mots peuvent renfermer, elles en embrassent seulement une partie.

Quelles sont les propriétés choisies qui devront former la base d'une définition géométrique, et quel en sera le nombre ?

La réponse à cette question exige une distinction radicale que voici : s'il s'agit d'une figure de nouvelle invention, il est clair que le choix de l'espèce et celui du nombre seront, de droit, abandonnés à l'inventeur ; mais, lorsque la figure qu'on se propose de définir est connue de tout le monde, comme le plan et la ligne droite ; lorsqu'elle a déjà un nom commun, comme l'infini, il est impossible que le géomètre qui fabrique sa définition, ne tienne pas compte dans une certaine mesure, soit au point de vue de l'enseignement, soit au point de vue de la science pure, de cette circonstance particulière ; il est impossible qu'il ne cherche pas à saisir, sous le terme vulgaire, le sens le plus général, le plus simple, le plus précis, qui y demeure attaché, et à l'introduire dans la définition. Si donc il est permis d'être indulgent, sous le rapport du nombre des conditions, ce ne sera pas se montrer trop exigeant que de lui demander, sous le rapport de l'espèce, d'observer les trois préceptes suivants, qui complètent les règles ordinaires de rigueur (1) :

Premièrement, si l'on trouve que tel mot a un sens suffisamment précis, avoir soin de nous en avertir et de lui conserver toujour ce sens précis.

(1) *Essai*, 1re partie, chap. IV.

Secondement, si l'on emploie un mot ayant plusieurs significations, s'attacher à en préciser le sens le plus vulgaire entre tous, comme étant le plus simple.

Troisièmement, si le mot correspond à des idées générales, dont les unes sont positives et les autres négatives, s'en tenir, de préférence aux autres, à celles qui sont positives, comme étant les plus saisissantes.

C'est à ces conditions qu'une définition spéciale, fût-elle rigoureuse, méritera d'être appelée *naturelle ;* or, cette qualité d'être naturelle est une des plus essentielles que doivent posséder les premières définitions spéciales de la géométrie.

On peut croire que cette vérité était déjà classique, au temps de Pythagore et de ses disciples ; car, le recueil de *Définitions* qui nous reste des dialogues de Platon, en contient plus d'une où ces qualités paraissent briller d'un très-vif éclat. Ainsi, par exemple, la ligne droite est celle « *dont les points milieux ombragent les extrêmes ;* » de telle sorte que, si l'une des extrémités était lumineuse, et si un point du milieu avait la force de cacher, l'autre extrémité ne pourrait être illuminée, ce qui n'arrive pas avec les lignes courbes (1). Cette courte description ne frappe-t-elle pas tout d'abord votre esprit, comme un trait de lumière ? Elle le charme aussi à la façon d'une peinture, et, si vous en soumettez le fond à l'analyse, elle ne laisse pas que de donner une ample satisfaction à la raison.

Reportons-nous en effet, par la pensée, au siècle de Platon. Lorsqu'il dit que la ligne droite est « celle dont

(1) Platon, Œuv. compl. *Recueil des Scolies*, trad. par V. Cousin. 1821-50.



les points milieux ombragent les extrêmes, » il exprime simplement cette idée vulgaire que la ligne droite est le chemin que suivent les rayons lumineux. Mais, à cette époque, le Soleil et les astres, en général, passaient pour des corps formés d'une substance incorruptible, et leur lumière, pour une essence parfaite : c'est donc par une pensée, à la fois élevée et naturelle, que l'auteur songe à établir les principes d'une science humaine sur des éléments puisés dans la sphère céleste.

Une telle idée peut-elle servir de base à une définition scientifique ? Il est certain qu'à présent nous avons trouvé le moyen de soumettre à l'expérience les lois de la propagation de la lumière du Soleil, tout comme celles de la lumière d'un bec de gaz ou d'une chandelle ; aujourd'hui nous savons, à l'aide d'appareils ingénieux, emprisonner un rayon lumineux dans une chambre, vérifier qu'il marche ordinairement en ligne droite, et, le suivant dans ses allées et ses venues, mesurer sa vitesse aussi bien que celle d'un cheval : donc, un semblable rayon n'a plus rien de divin à nos yeux ; et, nous penserions faire une véritable pétition de principes, ou une image plus que grossière, en définissant la ligne droite des géomètres par une propriété des rayons lumineux. Mais, il n'en pouvait être de même au temps de Platon, et tout nous porte à croire que sa définition dût être acceptée, par les savants et par les philosophes contemporains, comme marquée au coin de la logique la plus haute et la plus pure : nous pouvons encore à présent la regarder comme le type des définitions naturelles.

CHAPITRE II

Définitions diverses de la ligne droite

Toutes les définitions sérieusement discutables qu'on a données, depuis Platon, pour la ligne droite, peuvent se ramener à trois types principaux, que j'indique ainsi : celle d'Euclide, celle de Legendre et celle des géomètres modernes.

Euclide, dans ses Éléments, définit la ligne en général comme une longueur, sans largeur. Il y ajoute, pour la ligne droite en particulier : « Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ἑαυτῆς σημείοῖς κεῖται » ; ce que Peyrard traduit mot à mot, en latin :

« *Recta linea est, quœ ex æquo ipsis in eâ punctis ponitur* » ; puis, en français :

« *La ligne droite est celle qui est également placée aux points qui sont en elle* (1). »

J'avoue que cette définition me paraît être d'un sens assez obscur, dans les trois langues, et qu'on peut y voir presque tout ce que l'on veut. Notons pourtant que le

(1) *Œuvres* d'Euclide, vol. 1er, trad. par Peyrard, année 1814.

même Euclide démontre, après une vingtaine de propositions intermédiaires, cet autre théorème :

« *Dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.* »

D'où l'on peut inférer, avec vraisemblance, que l'auteur ne regarde pas comme l'équivalent de sa définition cette idée « que la ligne droite soit la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités. »

La définition donnée par Legendre, dans le plus grand nombre de ses éditions, est beaucoup plus claire. « *La ligne droite,* dit-il, *est le plus court chemin d'un point à un autre.* » Comme on le voit, Legendre choisit pour caractériser une droite la propriété démontrée dans la 20e proposition d'Euclide. En cela, il suit l'exemple d'Archimède qui admet, parmi ses principes, que la ligne droite est la plus courte de celles qui ont les mêmes extrémités (1).

Les géomètres modernes affirment généralement que l'idée de longueur suppose une opération préalable de mesure, et partant rejettent cette idée de longueur, comme une notion complexe qui ne peut être introduite de prime-saut dans les définitions géométriques. C'est donc, pour la plupart d'entre eux, par une sorte de considération pure et simple, non contestée d'ailleurs, que la ligne droite est la plus courte qu'on puisse mener entre deux points, et qu'il y en a qu'une. Quant à donner une définition proprement dite de la ligne droite, il n'en est pas question ; ils s'en passent (2).

(1) *Géométrie* de Legendre, édit. diverses. — *Œuvres* d'Archimède, trad. par Peyrard, 1807.

(2) *Traités divers de géométrie*, par MM. Duhamel, Rouché et De Comberousse, Ricart, Bourget et Housel, etc.

Commençons par reconnaître qu'au point de vue de l'enseignement pratique et de la rapidité des études, il suffit que ces premiers principes soient certains, et que pas n'est besoin de les avoir rigoureusement établis, pour apprendre aux élèves l'art de raisonner juste en cette matière, ce qui est le but principal de la géométrie. Cependant on ne peut s'empêcher de regretter, au nom de la logique, l'absence d'une parfaite rigueur dans les premières définitions. Il importe évidemment que la philosophie de la science n'ait rien à se reprocher ; et puis, qui ne pourrait pas craindre que la vue d'une telle imperfection, au début, n'exerçât une fâcheuse influence, dans la suite, sur l'esprit de l'élève comme sur celui du maître ?

« C'est une de mes grandes maximes, dit Leibniz, dans « ses *Nouveaux essais* sur l'entendement, qu'il est bon « de chercher les démonstrations des axiomes mêmes, et « je me souviens qu'à Paris, continue-t-il, lorsqu'on se « moquait de M. Roberval, déjà vieux, parce qu'il voulait « démontrer ceux d'Euclide, à l'exemple d'Apollonius et « de Proclus, je fis voir l'utilité de cette recherche (1). »

Bertrand, de Genève, est un de ceux dont les efforts à cet égard ont été les plus heureux. Il commence le second volume de son *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, par des réflexions très-lumineuses sur l'espace, le plan, et la ligne droite, dont il tire plusieurs propositions, qu'on a coutume de regarder comme des axiomes, ; entre autres celle-ci, que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre (2).

(1) Leibniz, *Nouv. essais sur l'entend. hum.* Préf.
(2) Genève, in-4°, 1778.

Laplace, dans le *Journal des séances de l'École normale*, présente aussi une définition de la ligne droite, qui paraît avoir les mêmes avantages.

Il est permis de partager, avec ces deux illustres géomètres, l'opinion du philosophe Saxon, et de considérer comme une chose indispensable, de formuler de bonnes définitions, dès les premières figures qu'on étudie ; et, par bonnes définitions, on doit entendre celles qui, outre qu'elles sont naturelles, satisfont à toutes les conditions ordinaires, tant générales que particulières, des définitions géométriques.

Quelques auteurs modernes, particulièrement les italiens, ont donné la définition suivante de la ligne droite : « *celle qui peut tourner sur elle-même, sans décrire de surface, ni engendrer de volume.* » A dire vrai, cette définition est exacte, bien que l'idée de longueur en paraisse écartée ; car, on peut démontrer qu'il doit y avoir une figure semblable, et qu'elle est unique. Mais, cela ne nous apprend pas grand chose ; et, nous sommes à la fin très-peu édifiés sur la nature de la ligne droite, lorsqu'on nous a dit qu'elle ne peut produire, en tournant sur elle-même, ni surface, ni volume. L'auteur a le tort de nous mettre en présence de deux propriétés essentiellement négatives : je pourrais dire trois ; car, d'après Euclide et d'après ces auteurs eux-mêmes, toute ligne est une longueur, sans largeur ; ajoutons-y qu'elle tourne sans décrire de surface et sans engendrer de volume, et nous apercevons bien trois négations au fond de cette définition.

Il est vrai que, en récompense, la ligne courbe étant celle qui n'est pas droite, on se trouve alors en face de deux négations, qui valent une affirmation ; de telle sorte

que, la ligne droite ayant été définie par une propriété négative, la ligne courbe le devient par une propriété positive : c'est juste le contraire qui est à désirer.

On peut admirer néanmoins cette définition à titre de peinture vraie, peinture moins saisissante, à coup sûr, que celle de Platon (1), mais analogue peut être à celle d'Euclide. Il semble, en effet, qu'on puisse soupçonner Euclide d'avoir voulu nous placer sous les yeux, dans sa définition, un bâton qui est étendu sur le sol et le touche également par tous ses points, de même que les géomètres italiens nous représentent une baguette ronde et tournant sur elle-même. Mais alors, cette définition n'est plus qu'une image ; et, s'il suffisait de faire une image pour avoir une bonne définition, il serait plus simple de dire qu'une ligne droite est un fil bien tendu, que de recourir à l'idée de repos ou de mouvement d'une tige rigide.

Une tentative non moins hardie a été faite, dans le même sens, par Duhamel, membre de l'Institut, en l'année 1866. Elle mérite d'être examinée, soit à cause de la force qu'elle peut tirer du grand nom de l'auteur, soit à cause des tendances qu'elle révèle, et qu'on retrouve fort exagérées et défigurées dans ses imitateurs. Le savant géomètre propose d'adopter, comme définition de la ligne droite, cette propriété « *d'être une ligne indéfinie telle que, par deux points donnés, on n'en peut faire passer qu'une seule.* » Une ligne courbe, pour lui, est toujours celle qui n'est pas droite, ni composée de lignes droites; en d'autres termes, une ligne courbe est telle

(1) Chap. I.

que, par deux points donnés, on en peut faire passer plusieurs (1).

On se demandera d'abord si cette définition, aussi bien que la précédente, est naturelle et simple. Nous ne trouvons effectivement, ni dans les données de l'expérience, ni parmi les idées nécessaires, ni dans les abstractions immédiates de l'esprit, rien qui nous fasse voir une droite comme une ligne « telle que, par deux points, on n'en puisse faire passer qu'une seule. » L'élève à qui vous présenterez une telle définition l'acceptera, sans doute, et probablement ne s'en plaindra pas, dans la suite de son cours de géométrie ; mais, quel souvenir, quelle vue ancienne ou nouvelle une pareille phrase peut-elle réveiller dans son intelligence ? Est-ce bien là une de ces propriétés positives qui correspond à un sentiment général et universel, qui vous saute aux yeux, vous saisit et pénètre dans votre esprit sans effort ? Personne ne le pensera, et tout le monde sera tenté de ranger cette définition dans la catégorie des définitions *artificielles*, lesquelles ne valent absolument rien pour commencer l'étude de la géométrie (2).

Il faut encore, pour qu'une définition soit bonne et acceptable, qu'elle satisfasse à cette double condition particulière : que la figure définie soit démontrée comme *possible* et *unique ;* c'est ce qu'on nomme la justification d'une définition. Ici, cette justification était nécessaire ; nul ne croira, en effet, qu'on puisse regarder comme évident — je ne dis pas comme vrai — que, par deux

(1) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e partie, parag. 9.

(2) *Essai*, 1re partie, chap. VI.

points donnés, passe une ligne telle qu'on ne puisse en faire passer deux pareilles. L'auteur aurait pu tout aussi bien prendre pour définition cette qualité d'une ligne que, par deux points donnés, *on n'en puisse faire passer que trois;* cette seconde assertion n'eût pas été moins évidente que la première, et l'esprit du lecteur, que n'éclaire encore aucune notion de géométrie, n'est pas plus autorisé à refuser l'une que l'autre. Cependant, la première est vraie, tandis que la seconde est fausse; mais, cette distinction même implique un raisonnement, exige une démonstration, qui ne se trouve ni dans le livre de Duhamel, ni dans les écrits de ses disciples.

Tout bien considéré, la tentative de Duhamel, pour définir la ligne droite indépendamment de toute idée de longueur, revient donc purement et simplement à admettre, comme le font la plupart des géomètres modernes, et sans le démontrer davantage, que la ligne droite jouit exclusivement de cette propriété d'être seule de son espèce à passer par deux de ses points ; mais, tandis que quelques-uns s'efforcent d'en présenter cette propriété comme une conséquence, justifiée ou non, de sa brièveté, Duhamel a levé toute difficulté en la choisissant pour définition même.

CHAPITRE III

Définition exacte de la ligne droite

Nous avons vu que Legendre définit la ligne droite, en disant que c'est *le plus court chemin d'un point à un autre*. Cette définition, telle quelle, est l'expression d'une qualité positive de la ligne droite, prise parmi celles qui puisent leur évidence dans l'expérience de chaque jour et de chaque individu. Tout le monde sait et accepte qu'étant donnés deux points, il y a plusieurs manières de se transporter de l'un à l'autre : on peut dire que c'est là un fait, une donnée naturelle. Personne ne contestera non plus que les chemins, qui conduisent d'un endroit à un autre, n'ont pas tous la même longueur ; et l'appréciation de cette différence présuppose-t-elle une comparaison mathématique ? Pas le moins du monde. L'idée de temps et de vitesse nous est assez familière pour que nous soyons assurés qu'entre deux points, placés en regard dans l'espace, il y a plusieurs lignes allant de l'une à l'autre, et que, parmi ces lignes, — que nous sachions ou non les mesurer, c'est-à-dire les comparer matériellement à l'unité, — les unes possèdent la même

longueur, les autres sont plus longues et les autres plus courtes; enfin que, si courtes que puissent devenir ces dernières, comme elles ne peuvent pas se réduire à zéro, *il y en a une d'entre elles qui est plus courte que toutes les autres, et qui n'est pas nulle.* Nier de telles assertions, c'est vouloir se mettre en révolte contre les données de l'expérience universelle et contre les spéculations de la raison, c'est-à-dire contre ce qu'on appelle le sentiment général de l'évidence.

Mais il y a plus: si l'on veut bien consentir à se représenter l'espace, comme il l'est toujours en géométrie, c'est-à-dire comme un milieu complètement libre, homogène et continu, cette conception nous oblige à soutenir que, s'il y a deux chemins d'égale longueur pour aller d'un point à un autre, il faut qu'il y en ait une infinité d'autres, de même longueur, distribués symétriquement dans l'espace par rapport à ces deux points. Le cas du plus court chemin devra seul être excepté, sans quoi ce ne serait pas le plus court; d'où l'on conclut que, s'il existe une ligne plus courte que toutes les autres entre les deux points, *cette ligne est unique.* Comme on le voit, la définition de Legendre satisfait aux deux conditions particulières de toute bonne définition, et il est remarquable que c'est l'expérience jointe à une abstraction de l'esprit, mais non pas l'expérience seule, ni une abstraction seule, qui nous conduit à ce résultat.

Rien n'empêche maintenant d'imaginer que les deux points dont il s'agit sont aussi éloignés qu'on voudra, et, par suite, de se représenter par la pensée une droite de plus en plus longue, et même de la concevoir indéfinie, bien que l'observation ne nous en fournisse aucun exemple. Deux droites indéfinies étant données, sera-

t-il permis d'affirmer qu'elles coïncident dans toute leur étendue, dès qu'elles ont deux points communs ? Oui. Car, si on les place, comme l'indique le professeur Vincent, de manière à ce que deux points de l'une tombent sur l'autre, d'un côté, les deux droites devront coïncider dans la partie intermédiaire, puisque chacune d'elles est l'unique plus court chemin entre ces deux mêmes points ; d'un autre côté, elles devront aussi coïncider dans la partie non intermédiaire, puisque les deux points peuvent être pris à volonté, sur la première droite ; donc, les deux droites coïncident dans toute leur étendue (1).

C'est cet ensemble de conditions, en nombre infini et toutes possibles, que quelques géomètres ont voulu exprimer d'un seul mot, en définissant la ligne droite comme « le plus court chemin *entre deux quelconques* de ses points. » Cette formule est exacte, mais trop concise ; elle a besoin, plus encore que la formule de Legendre, d'être expliquée et justifiée, et la justification manque absolument, soit dans les éditions de Legendre, soit dans les autres ouvrages classiques du même genre. Une semblable lacune est regrettable, et nul doute qu'elle ait servi de prétexte à la plupart des contestations qui se sont élevées sur cette question, et aux erreurs qui en sont la conséquence.

(1) A.-J.-H. Vincent, memb. de l'Institut, *Cours de Géom.* 1834.

CHAPITRE IV

Conséquences de la définition exacte de la ligne droite

Duhamel et beaucoup d'autres, après lui, regardent la définition de Legendre comme entièrement défectueuse, parce que, dit-il, « *elle ramène une notion à d'autres que l'on n'a pas, et qui sont moins simples que la première* (1). » Ces notions que l'on n'a pas, et qui sont moins simples que celles de la ligne droite, sont celles de longueur. En admettant que Duhamel n'ait pas ici confondu l'essence d'une définition de chose avec celle d'une définition de nom, qui ne sait cependant dans quel ordre se présentent les définitions générales de la géométrie? C'est par une série d'abstractions que l'esprit humain arrive successivement à l'idée de volume, de surface et de ligne géométrique. Ces abstractions consistent à enlever, par la pensée, une ou plusieurs dimensions au volume d'un corps solide, pour obtenir une surface,

(1) *Des Méthodes*, 2e partie, p. 9.

une ligne et un point ; en particulier, la ligne géométrique doit être regardée comme une figure, qui a l'étendue en longueur, mais sans largeur, ni épaisseur.

La longueur d'une ligne est donc une propriété inhérente à cette ligne, et il est aussi impossible de se représenter une ligne sans longueur, que d'imaginer un solide sans volume. Descartes l'exprime formellement à diverses reprises, dans sa géométrie ; et, cette vue n'a rien d'arbitraire, car il ne dépend pas de vous, ni de moi, que cela soit ou ne soit pas.

On peut, sans aucun doute, ne pas faire entrer le mot *longueur* dans les termes mêmes de la définition d'une ligne ; on peut dire, avec Lacroix, qu'elle est l'intersection de deux surfaces ; avec Duhamel, qu'elle est la limite ou l'extrémité d'une surface ; avec d'autres, qu'elle est le lieu décrit par un point, qui se déplace d'une façon quelconque dans l'espace ; mais, quelle que soit l'expression qu'on emploie, on ne saurait considérer une ligne autrement que comme le résultat de cette abstraction, que je viens de rappeler, et qui consiste à se représenter, par la pensée, deux surfaces se rencontrant l'une l'autre ; puis, à enlever, toujours par la pensée, les parties de ces surfaces qui ne sont pas à la fois sur l'une et sur l'autre. En deux mots, une ligne est une longueur, sans largeur, ni épaisseur ; personne ne peut sortir de là.

Il est vrai que la longueur d'une ligne n'est pas toujours susceptible d'être exactement exprimée par un nombre. Mais, les qualités d'une figure géométrique ne dépendent pas du tout de la possibilité de pouvoir être traduites par le calcul numérique ; ces qualités existent, du moment que la figure est définie, même pour celui qui n'a pas l'idée de nombre.

Le calcul est un moyen pratique de rendre saisissables ces propriétés ; mais d'abord, ce n'est qu'un moyen, et ce moyen reste toujours imparfait, comme le sont tous les instruments ; ensuite, il devient souvent impuissant à représenter exactement une grandeur, dont la pensée atteint sans peine les dernières limites. Osera-t-on dire que là où la plume et le compas ne peuvent rien, la raison perd ses droits ? que si, par exemple, un calcul ne peut aboutir qu'à une série d'opérations qui n'en finissent plus, son objet final ne peut pas exister autrement ; de telle sorte que la longueur d'une droite qui, pour être mesurée, exigera du calculateur une infinité d'opérations graphiques ou arithmétiques, n'a ni plus ni moins de réalité que le Dieu de certains positivistes qui est en train de se faire une existence, laquelle ne sera consommée qu'à la fin des siècles ? Mais, quoi qu'en puissent dire ces géomètres, qui l'oublient ou veulent l'oublier, une ligne n'est pour eux, comme pour nous, pas autre chose qu'une longueur ; et elle acquiert cette qualité d'être longue en même temps qu'elle est définie comme ligne, c'est-à-dire en même temps qu'elle vient au monde !

Aussi, n'est ce pas un spectacle des moins étranges que de voir des esprits sérieux essayer de soutenir cette thèse, que l'idée de longueur, laquelle qualifie essentiellement — ils vous l'accordent — tout le genre, qu'on nomme *lignes*, n'est pas assez simple pour entrer dans la définition particulière de l'espèce, qui s'appelle *droite*. Il y a là un oubli manifeste des règles de la logique la plus élémentaire.

D'autres géomètres, moins absolus dans leur premier jugement, consentent à considérer la notion de longueur comme inséparable des mots *ligne droite*, mais sans

admettre pour cela qu'elle doive, *à priori*, accompagner ceux de *ligne courbe*. Une telle distinction a quelque chose de subtil et de spécieux, qui peut séduire un esprit inattentif, et qu'il est bon de réfuter.

Ce qui différentie le genre d'avec l'espèce, c'est que les qualités du genre se retrouvent dans l'espèce ; à un degré moindre ou à un degré plus élevé, elles s'y retrouvent, et cette forme particulière, qu'elles y affectent, est ordinairement ce qui caractérise l'espèce. C'est ainsi qu'en géométrie on passe du genre à l'espèce, dans toutes les figures possibles, soit à deux, soit à trois dimensions ; c'est ainsi que les premières définitions spéciales se tirent des générales. Que si une qualité du genre vient à disparaître totalement, dans un cas, cette disparition même ne constitue pas une espèce proprement dite, mais un nouveau *genre*, qu'ont peut appeler, au point de vue de la qualité qui a disparu, *l'opposé* du premier.

Qu'est ce qui disparaît dans une ligne courbe, lorsqu'elle devient droite ? Ce ne peut être la longueur ; sans quoi, elle ne serait pas une ligne, d'après les termes mêmes de la définition générale, soit avant, soit après sa transformation. Evidemment, ce qui disparaît, c'est ce qui fait, non pas qu'elle est ligne, mais qu'elle est courbe ; c'est cette qualité qu'on connaît et qu'on étudie, dans l'école, sous le nom de *courbure :* comme on le dit, la courbure n'existe pas dans une ligne droite. La ligne droite n'est donc pas du même genre que la ligne courbe, sous le rapport de la courbure ; mais, elle en est une espèce, sous le rapport de la longueur ; et, si elle possède cet attribut d'être longue, il faut qu'elle l'ait en partage avec tout le genre ligne ; d'où il résulte, qu'on ne saurait

reconnaître l'idée de longueur comme inséparable de la *ligne droite*, sans l'admettre aussi de la *ligne courbe*.

Ce que la ligne droite nous offre de particulier dans sa longueur, de distinctif et d'excellent pour une définition, c'est qu'entre deux de ses points sa longueur a une valeur *minimum*, différente de zéro, ce qui n'a pas lieu avec une courbe ; mais, soutenir que la ligne droite, parce qu'elle n'est pas courbe, peut avoir une qualité de longueur qui manquerait totalement à la ligne courbe, c'est se méprendre complètement sur les différences du genre et de l'espèce.

On peut rendre cette vérité palpable, par une comparaison. Si l'on regarde un fil tendu, on a le droit de dire que ce fil a une longueur, qui lui est propre ; et cela, qu'on sache ou non la mesurer, c'est-à-dire l'exprimer par un nombre. Duhamel l'admet volontiers. Mais, si l'on vient à plier ce fil sur lui-même, il n'en conserve pas moins sa longueur primitive, sans qu'on puisse alléguer aucun motif plausible pour prétendre que cette longueur a disparu, ni qu'elle a diminué, ni qu'elle a augmenté.

J'accorde qu'un fil est quelque chose de matériel, tandis que les lignes de la géométrie sont purement idéales ; mais, il s'en faut que cette différence constitue, pour elles, un désavantage. Les géomètres ne se gênent pas pour attribuer à leurs figures idéales une multitude de propriétés, qu'on ne rencontre pas ou qu'on rencontre en partie seulement, dans les corps matériels : l'espace est pour eux, comme je l'ai dit, un milieu continu et homogène ; leurs solides ne sont pas impénétrables ; leurs lignes sont, à volonté, rigides ou flexibles ; leurs points sont quelquefois pesants, quoique dépourvus de volume. En un mot, c'est toujours sur des figures parfaites, sauf

à en rabattre dans la pratique, que le géomètre établi ses théories. Ce qui est dit plus haut d'un fil, si grossie qu'il soit, peut donc sans crainte être appliqué à un ligne mathématique, et, lorsqu'elle deviendra droite, d courbe qu'elle était, ou *vice versa*, il n'est pas admissibl que sa qualité de longueur puisse se modifier, ni se perdre durant cette métamorphose.

Ces vérités ne seraient pas contestées par les géomètres, s'ils avaient un peu plus de réserve et un peu plus d'indépendance dans leurs jugements. Lacroix était obligé, en l'an VI, de défendre, devant la Société Philomatique, la brièveté de la ligne droite « comme étant plus près des notions premières que les autres définitions qu'on peut donner de cette ligne (1). » En 1870, on a vu, à l'Académie des sciences, mettre en doute que la ligne droite ne fût pas perpétuellement sinueuse. Aujourd'hui, l'on va plus loin ; on lui conteste ses qualités de ligne mathématique, et il semble que toutes les considérations sont bonnes à lui opposer.

Voici, en effet, un traité récent de géométrie, dont l'auteur affirme que « *l'idée de grandeur ne se conçoit pas, sans un terme de comparaison.* » Il est vrai qu'il lui faut que ce terme de comparaison soit matériellement fixe, pour que la grandeur mesurée le soit elle-même, et qu'on puisse y étayer quelque raisonnement. Or, « pour la ligne « droite, il ne se présente rien de pareil, dit-il ; il n'y a « pas d'unité fixe, qu'on puisse retrouver en tous temps, « en tous lieux, quelles que soient les catastrophes qui « bouleversent le monde ; par conséquent, *une ligne « droite n'a pas invariablement une longueur qu'on*

(1) Lacroix. — *Discours de réception à la Société Philomatique.*

« *puisse assigner.* » Cette menace ne laisse pas que d'être assez embarrassante pour l'humanité.

Son embarras s'augmente encore par les réflexions qui suivent. « Deux droites, ajoute l'auteur, qu'on a reconnues inégales en les comparant, si elles étaient considérées l'une après l'autre et isolément dans l'espace, « ne présenteraient aucune différence à un observateur « réduit à occuper successivement le point milieu de « chacune d'elles ; et, dans certaines circonstances, la « même droite, vue à des intervalles de temps éloignés, « ne paraît pas identique ; car la distance de deux villages voisins, qui est immense pour un enfant, lui semble « petite quand il a grandi et qu'il a voyagé (1). »

Ajoutons que, si le voyageur revient aveugle dans son village, il pourra se tromper du tout au tout : la conclusion est ainsi beaucoup plus sûre, et n'est guère moins sérieuse. Mais aussi, pourquoi poser en l'air un principe, que rien ne justifie, comme celui-ci : « l'idée de grandeur ne se conçoit pas, sans un terme de comparaison, » ou comme celui-là : « le terme de comparaison doit être matériellement fixe ? »

Pour réfuter ce paralogisme, il suffit heureusement d'en appeler de l'auteur, marchant avec confiance sur les brisées du maître, à l'auteur procédant de lui-même à l'établissement de ses premières définitions. Quinze pages auparavant, il a déjà défini une ligne « comme étant une étendue, » et il a ajouté que « l'étendue est toujours considérée indépendamment des corps. » Mais, la ligne

(1) *Elèments de Géométrie*, par J. Ricart, professeur au collège Rollin, 1875.

droite est une ligne; donc, c'est une étendue considérée indépendamment des corps.

Il fait plus; il explique et commente sa pensée en ces termes : « Le géomètre purement théoricien, n'examine « pas tel ou tel corps en particulier, ni sa surface indi- « viduelle; il se représente les formes des volumes, « des surfaces et des lignes, et ces *figures* lui suffisent.» Le mot est souligné.

Si ces *figures* lui suffisent, le géomètre théoricien peut donc concevoir aussi une étendue qui lui serve de terme de comparaison. Ses conceptions n'ont rien à redouter des cataclysmes de l'univers; elles dureront, malgré les changements de temps et de lieux, tant que durera sa raison. Il lui importe fort peu qu'on mesure, dans l'atelier, les longueurs à l'aune ou au mètre, et les angles au degré ou au grade. Tous les raisonnements de la géométrie sur les lignes, comme sur les angles, sont indépendants du choix et de la fixité matérielle de l'unité de longueur; ils ne le sont pas moins de l'unité d'angle.

Le géomètre a-t-il à craindre que son terme de comparaison vienne à s'altérer ou à lui échapper? L'auteur sait parfaitement que non : il sait que la ligne droite est une ligne, qu'une ligne est une étendue, qu'une étendue se conçoit indépendamment des corps, et que ce qui se conçoit indépendamment des corps peut se retrouver en tout temps, en tous lieux, quelles que soient les catastrophes qui bouleversent le monde. Il sait même que « lorsqu'une quantité varie d'une manière continue, » — toutes les grandeurs mathématiques sont dans ce cas, — « elle passe par une infinité de valeurs qui sont « exprimables en nombres, et par une infinité d'autres

« qui ne le sont pas. » Toutes ces valeurs, cependant, se conçoivent aussi bien les unes que les autres.

En vérité, on se demande quel parti un géomètre pense pouvoir tirer de cet aphorisme expérimental « que l'idée de grandeur ne se conçoit pas, sans un terme de comparaison, » après qu'il en a démontré, dans plusieurs pages et en très-bons termes, la fausseté et l'inutilité.

Nous engageons fortement les géomètres de l'avenir à réfléchir, avant d'accueillir les définitions et les notions nouvelles qu'on présente à leur acceptation ; la plupart d'entre elles sont marquées au coin de l'irréflexion la plus surprenante. Sans sortir de notre sujet, nous signalerons encore, comme preuve de la déperdition générale de la logique chez les géomètres, une prétention bien singulière, qui s'infiltre peu à peu dans l'école, sans aucune justification possible. Cette prétention consiste à affirmer, d'une manière générale, que la définition d'une grandeur quelconque doit être précédée de celle de l'égalité et de l'inégalité de ces deux grandeurs.

Dans le cas qui nous occupe présentement, la définition d'une ligne droite devrait être précédée de la définition de deux droites égales et inégales. Cette assertion est tout simplement insensée. Eh quoi ! une ligne droite n'est autre chose, quelle qu'en soit la définition, qu'une longueur, et il se pourrait que deux lignes droites fussent égales et inégales entre elles, sans l'être en longueur ! Mais en quoi consistera donc leur égalité ou inégalité, si ce n'est dans leur longueur, puisque, en vertu de leur définition générale et spéciale, elles ne possèdent pas d'autre qualité ? Sera-ce dans la propriété de pouvoir être placées l'une sur l'autre de manière à se recouvrir exactement ? Cette propriété, qui sert de critérium à

tant de géomètres français et étrangers, n'offre absolument aucun sens, si la ligne droite est celle qui n'occupe aucune place dans l'espace et ne peut engendrer aucun volume, quand elle tourne autour de deux de ses points ; car, il est impossible de concevoir que deux choses puissent être équivalentes, pour tel ou tel emploi, si elles sont reconnues, par leur définition même, incapables de produire aucun effet. Elle n'en a pas davantage, si la ligne droite demeure définie par des propriétés exclusivement négatives, comme d'être seule à passer par deux points, et de n'avoir ni largeur, ni épaisseur, puisqu'il ne reste rien à considérer dans la superposition de deux droites. Enfin, elle constitue une pétition de principes des plus flagrantes, si la ligne droite n'a pas été du tout définie préalablement.

Ceux qui croient comprendre une semblable propriété se font donc illusion ; ils sous-entendent bel et bien la seule chose, exprimée ou non, qui préexiste à la défition spéciale de leur espèce de ligne, savoir : que les lougueurs des deux droites, qu'ils envisagent, sont égales entre elles.

Les premières pages des traités de géométrie, qui s'impriment depuis dix ans, sont remplies de semblables grossièretés, qui n'ont pas d'autre vertu, pour s'implanter chez nous, que celle d'avoir pris naissance par delà la frontière ; ou les affirme gravement pour deux lignes, pour deux angles, pour deux rapports, et il n'est presque plus d'ouvrage récent, tant soit peu à la mode, où l'auteur ne se croie obligé de reproduire, comme un axiome tombé des nues, qu'avant de définir une nouvelle espèce de grandeur, il faut d'abord définir l'égalité et l'inégalité de deux de ces grandeurs. Or, c'est en vain

que les plus audacieux essayent de faire remonter, jusqu'aux anciens, la responsabilité d'une telle aberration de leur esprit : on peut défier les plus habiles d'en montrer aucune trace, ni dans Archimède, ni dans Euclide, ni dans leurs commentateurs; et, il n'est pas douteux que, si l'on eût demandé à Pascal ce qu'il faut penser d'une phrase conçue en ces termes, et qui est extraite à peu près textuellement du modèle des traités modernes : « *deux grandeurs, qu'il est inutile de définir, sont égales,* « *lorsqu'elles satisfont à telles et telles conditions,* » il aurait déclaré, sans hésiter, qu'une telle phrase est absolument absurde.

CHAPITRE V

Définitions diverses du plan

La plus ancienne définition du plan, qu'on connaisse, est celle dont on retrouve les traces dans un dialogue de Platon ; elle est calquée fidèlement sur celle de la ligne droite, qui figure dans le même recueil. « Le plan, « d'après Platon, est une surface dont les parties du « milieu ombragent les extrêmes » ; ce qui doit nous faire entendre que, si quelques parties dans le milieu d'une pareille surface étaient opaques, et qu'une lumière fut placée vers une extrémité, les points placés à l'autre extrémité seraient dans l'ombre (1).

De prime abord, il semble que cette définition n'est qu'une image, comme il y en a tant au début de toutes les sciences. Mais, si l'on veut se souvenir que la loi de propagation de la lumière est aujourd'hui un fait établi par des expériences directes et raisonnées, et que, ensuite de cette loi, un rayon lumineux n'est pas autre

(1) Platon, *Œuvr. compl.*, *Recueil des Scolies*, trad. par V. Cousin, 1821-50.

chose qu'une ligne droite — quelque soit d'ailleurs le sens attaché à ce mot — il est aisé de constater que, sous la brillante image du philosophe, se cache une vérité mathématiquement rigoureuse ; elle nous représente effectivement le plan, comme « une surface telle que « toute droite qui passerait par deux de ses points ne « saurait s'en écarter » ; sans quoi, la lumière, qui suit le même chemin rectiligne, pourrait éclairer des parties du plan qu'elle doit laisser dans l'ombre, d'après les termes de la définition.

Mais, en même temps qu'on y voit éclater la rigueur et la logique, on ressent, à la vue de ce petit tableau lumineux de Platon, je ne sais quelle impression de poésie, qui vous saisit et vous satisfait pleinement, comme si l'auteur avait exprimé quelque sentiment que vous eussiez déjà naturellement ; or, il faut se rappeler que cette conditon d'exprimer, dans les choses connues, le sentiment le plus vulgaire, le plus naturel, le plus palpable pour ainsi dire, est une des qualités essentielles que doivent posséder les premières définitions spéciales de la géométrie (1).

On pourra donc considérer cette donnée de l'école platonicienne comme un simple coup de pinceau, si l'on veut ; mais, il faudra convenir qu'il est tracé de main de maître, et qu'il réussit à mettre sous vos yeux une définition parfaite. La seule objection qu'on puisse soulever, au point de vue doctrinal, contre l'expression de Platon, est-celle-ci : existe-t-il une surface qui possède les attributs d'ombre et de lumière, indiqués dans la définition ? Et, s'il y en a une, comment l'esprit parvient-il à se la

(1) Chap. I.

figurer ? Je ne pense pas que les anciens géomètres, non plus que les modernes, qui voudront accepter cette définition pour bonne, se soient préoccupés de répondre à cette double question ; et cependant, rien n'est plus important, pour l'art de penser et pour la méthode d'enseignement, que de satisfaire pleinement sous ce rapport aux exigences de la raison.

Euclide, imitant Platon, a comme lui étendu à la surface plane la définition qu'il avait adoptée pour la ligne droite. Il nomme plan « une surface qui est également placée aux droites qui sont en elle », c'est-à-dire : « ἐπίπεδος ἐπίφανεια ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. » Cette phrase peut se traduire, mot à mot, en latin par celle-ci : « *plana superficies est, quæ ex æquo ipsis in eâ* « *rectis ponitur* (1). »

Mais, quelle que soit la traduction qu'on en fasse, cette définition d'Euclide a le défaut capital de n'être pas claire. Plusieurs commentateurs l'ont interprétée en disant que le plan est une surface également étendue entre ses lignes, en ce sens que deux lignes droites, ayant entre elles une position relative déterminée et placées n'importe où, sur le plan, y comprendraient toujours le même espace. D'autres ont cru y voir cette idée que le plan peut être engendré par le flux d'une droite, tournant autour d'un de ses points, sans s'élever ni s'abaisser, tous les points de la superficie étant touchés par la ligne en mouvement, ou en quelque sorte *râclés*. Quelques-uns enfin affirment qu'Euclide a voulu dire

(1) La double traduction en français et en latin, que je cite, est extraite du grand ouvrage de Peyrard, approuvé par l'Institut de France, 1814.



tout simplement, que le plan est la plus courte ou la plus brève de toutes les surfaces qui ont les mêmes extrémités (1).

Toutes ces différences, dans l'interprétation de la définition d'Euclide, peuvent s'expliquer : en effet, d'un côté, la définition qu'il donne, prise au pied de la lettre, ne laisse pas que d'être fort obscure, et permet beaucoup de suppositions diverses ; d'un autre côté, on rencontre dans un ouvrage, attribué à Héron d'Alexandrie, lequel vécut 200 ans environ après Euclide et publia deux *Introductions à l'étude des Éléments Euclidiens*, une autre interprétation, qui s'éloigne des précédents commentaires autant qu'elle se rapproche de la définition classique, adoptée aujourd'hui. « Le plan, y est-il dit, est une « surface à toutes les parties de laquelle une ligne droite « peut être accommodée. » Il suffirait de remplacer, dans cette phrase du géomètre Héron, le mot « accommodée » qui a quelque peu vieilli, par un autre plus jeune et exprimant la même idée, pour en faire une définition tout à fait à la mode.

On peut s'assurer d'ailleurs que, telle qu'elle est, cette définition de Héron contient en germe toutes les autres ; car, si l'on peut accommoder une droite à toutes les parties d'une surface, il est manifeste qu'on pourra en accommoder deux, ayant une position relative déterminée ; puis trois, quatre, et un flux quelconque ; on pourra même en tirer

(1) Je trouve la plupart de ces interprétations dans une traduction d'Euclide faite par Pierre Le Mardelé, professeur à Lyon, en 1645, qui expose naïvement qu'elles sont toutes justifiées par le texte d'Euclide. Pour ma part, je ne suis pas très-éloigné de croire que mon collègue du XVII[e] siècle peut avoir raison.



aisément qu'une portion limitée à deux lignes, dans une telle surface, est plus petite en étendue que toute autre surface terminée aux mêmes extrémités, et qu'elle jouit des propriétés d'ombre et de lumière indiquées par Platon. On peut donc regarder la définition de Héron comme équivalente à celle d'Euclide, à celle de Platon et à toutes les interprétations de leurs commentateurs.

Legendre n'a point procédé comme Platon, ni comme Euclide, du moins en apparence, et il semble que sa définition du plan soit toute autre que celle qu'il a choisie pour la ligne droite. La ligne droite est, pour lui, « *le plus court chemin d'un point à un autre* », et le plan « *une surface telle qu'une droite quelconque y est contenue tout entière, si elle passe par deux points de cette surface* (1). » Ces deux définitions ont des dehors très-différents ; mais, lorsqu'on prend la peine de substituer au mot « droite », qui entre dans la seconde, le sens qui lui a été attribué dans la première, on voit tout de suite que la périphrase revient à dire que le plan est une surface, qui contient exclusivement le plus court chemin entre deux de ses points ; et que, par suite, cette définition du plan dérive de celle de la ligne droite, à peu près comme en dérivent celles d'Euclide et de Platon.

Remarquons aussi la parenté qu'elle a avec la définition de Héron, citée plus haut, et surtout, le puissant appel qu'elle fait au sens commun, c'est-à-dire au sentiment général de l'évidence. Il suffit, pour s'en convaincre, de se rappeler comment l'ouvrier procède dans les arts à la confection d'une surface plane : c'est en appliquant, dans tous les sens, une règle parfaitement droite sur une

(1) A. M. Legendre. *Éléments de géométrie*, 12e édit., 1823.

planche, que le menuisier s'assure qu'il n'y a, entre la planche et la règle, aucun espace laissé vide, et qu'il conclut à la rectitude de sa surface; l'ébéniste fait de même, pour vérifier une table ou un billard, et le mécanicien, pour règler un plan. C'est constamment la définition du géomètre Héron, rajeunie par Legendre, qui est mise à profit pour reconnaître qu'une surface est plane; et l'on peut soutenir, j'imagine, que cette pratique vulgaire de l'atelier est plus ancienne et plus universelle que les plus vieilles théories de la géométrie.

S'il ne s'agissait que de faire une image vraie, pour avoir une bonne définition, certes nul ne serait embarrassé d'en trouver : l'aspect d'un lac tranquille, la vue d'un marbre uni ou le miroir d'une glace polie, nous fournissent des images presque parfaites du plan. Mais, le géomètre, qui fabrique une définition, n'a pas seulement en vue de faire naître dans l'esprit de l'élève une idée nouvelle ou de réveiller quelque idée ancienne, comme on pourrait le croire; son but est, dans les commencements surtout, de fixer le sens des mots usités, qu'il emploiera dans le cours de ses théories, de telle sorte qu'il puisse à tout moment renvoyer son lecteur, pour la valeur de tel ou tel terme, à la définition précise qui en a été donnée auparavant, comme à une sorte de dictionnaire technique.

Si complexe que soit une proposition mathématique, il faut qu'en y remplaçant tous les termes spéciaux du discours par leur définition propre, cette proposition se résolve immédiatement en ses éléments, c'est-à-dire en une multitude de vérités, évidentes par elles-mêmes. Or, il n'est pas besoin d'être très-versé dans l'étude de la géométrie pour deviner que, dans la plupart des cas,

cette condition serait absolument impossible à obtenir, si l'on substituait au mot « plan » l'expression de « marbre poli » ou de « lac tranquille », avec tout le vague qu'une telle expression comporte. Il est donc nécessaire, pour le géomètre, de choisir parmi les significations multiples d'un mot, celle qui s'accommodera le mieux aux besoins ultérieurs du raisonnement. Ce choix d'ailleurs n'est pas déterminé par cette seule condition; il est assujéti à certaines règles générales, qui sont exposées ailleurs (1), et à cette condition particulière et expresse, que le terme employé corresponde toujours à une figure *possible* et *unique*. C'est cette dernière partie d'une définition, qu'on nomme sa *justification*.

Or, s'il est une définition qui ait besoin d'être justifiée, c'est celle du plan. Il s'en faut déjà que le fait d'être « le plus court chemin entre deux de ses points » soit une propriété simple pour la ligne droite, car, dans ces quelques mots se trouvent affirmées une infinité de conditions, qui sont toutes possibles, il est vrai, mais qui ont besoin d'être démontrées telles. A plus forte raison doit-il en être ainsi du plan, envisagé comme une surface sur laquelle une droite indéfinie peut s'appliquer exactement, dans tous les sens. On peut se demander, avec raison, si une semblable définition donne une idée bien nette de la forme du plan, si les conditions en nombre infini, qu'elle exprime, ne sont pas incompatibles, et ne rendent pas impossible l'existence d'une telle surface. Dans tous les cas, la définition géométrique et classique du plan n'est pas de celles qui puisent leur justification dans ce qu'on

(1) Chap. I.

nomme les idées nécessaires, et elle a besoin d'être démontrée, comme un véritable théorème (1).

Cette démonstration ne se trouve pas dans les ouvrages des anciens géomètres ; elle ne se trouve pas davantage dans les nombreuses éditions de la géométrie de Legendre ; la première trace écrite qu'on en découvre est presque contemporaine : c'est particulièrement le traité *Des Méthodes* de Duhamel, qui nous fournit sur cette matière les premières objections, en même temps que les premières réponses (2).

Rappelons-nous d'abord que Duhamel avait pris, pour caractériser la ligne droite, cette qualité d'être « une ligne indéfinie telle que par deux points donnés on n'en peut faire passer qu'une seule. » En suivant cet ordre d'idées, qu'il essaie de rattacher plus ou moins à la définition d'Euclide, Duhamel aurait dû définir le plan, comme « une surface indéfinie telle que par trois points donnés on n'en peut faire passer qu'une seule. » L'analogie des deux définitions eût été complète, et tout ce qu'on peut invoquer, pour ou contre la première, subsiste à l'égard de la seconde. Pourquoi ce géomètre n'a-t-il pas suivi sa pensée jusqu'au bout ? On ne se l'explique pas ; mais, si l'on considère que ce mode de définition n'offre à l'esprit que des propriétés purement négatives, abstraites et artificielles, lesquelles doivent être bannies autant que possible des principes de la science, on ne peut que s'applaudir de le voir abandonner le terrain, sur lequel il a construit sa définition de la ligne droite, et

(1) *Essai*, 1re partie, chap. IV.

(2) *Des Méthodes*, 2e partie, parag. 14 et suiv.

rechercher des qualités d'une autre espèce, pour formuler la définition du plan.

Duhamel propose donc d'appeler plan « *la surface* « *engendrée par une droite qui se meut en tournant autour* « *d'un point d'une autre droite à laquelle elle reste cons-* « *tamment perpendiculaire.* » Comme on le voit, cette propriété d'une droite de tourner autour d'une autre est d'un ordre essentiellement concret ; elle donne une idée suffisante de la surface engendrée ; elle peut donc servir de texte à une définition, pourvu qu'il ait été démontré auparavant que la figure existe, et qu'elle est unique.

Ce n'est pas que le mouvement d'une droite autour d'un point puisse être contesté ; mais, ce mouvement s'accomplit ici dans certaines conditions, qu'il faut rendre possibles. Et pour cela, l'auteur aura d'abord à établir la définition d'une droite perpendiculaire à une autre ; puis, en retour, celle d'angles égaux, et enfin, celle d'angle ; car, comment comprendre que deux droites soient perpendiculaires entre elles, ou que deux angles soient égaux entre eux, si l'on n'a pas l'idée d'angle ? Duhamel, il est vrai, ne pense pas tout à fait ainsi : il croit que pour entendre l'égalité ou la superposition de deux angles, « il n'est pas à propos de définir cette idée d'an- « gle, parce qu'elle ne saurait être ramenée à d'autres « plus simples ou seulement bien définies avant elle. » Si l'on veut juger de la portée d'une semblable affirmation, il suffit d'examiner le sens qu'on attache ordinairement au mot angle ; on restera convaincu que ce mot est pris habituellement avec une signification telle, qu'il est impossible de s'en servir ici, sans une restriction préalable.

CHAPITRE VI

Définition exacte de l'angle plan

Quand on dit qu'un angle est la *rencontre de deux lignes*, on emploie une expression qui ne rappelle que l'idée du sommet, et qui est vicieuse à tous les égards ; nous ne nous y arrêterons pas.

Euclide, dans la définition de l'angle, qu'il donne dès le premier Livre de ses *Eléments,* ne sépare pas du tout les deux mots *angle* et *plan ;* l'idée de plan marche immédiatement avant celle d'angle, à laquelle elle demeure associée, jusque dans le terme dont il se sert : *planus-angulus* (1).

Antoine Arnauld, de Port-Royal, considère l'angle rectiligne comme *un espace indéfini compris entre deux droites qui se joignent, du côté où elles s'approchent le plus* (2).

D'autres ont proposé, avec d'Alembert, de limiter cet espace, dans le sens où il est indéfini, à un arc de cercle,

(1) Trad. de Peyrard, déjà cité.
(2) *Nouv. Elém. de Géométrie,* livre VIII.

qui aurait le sommet pour centre et pour rayon une longueur arbitraire. On réussit ainsi à se débarrasser de la présence gênante de l'infini ou de l'indéterminé ; mais, c'est à la condition d'introduire, à sa place, un élément étranger à la nature de l'angle, et tout à fait superflu.

L'une et l'autre de ces trois manières de voir emportent d'ailleurs, avec elles, l'idée de surface plane, et leur adoption nous conduirait tout droit, dans la superposition de deux angles effectuée avant la notion du plan, à une pétition de principe.

Il y a aussi des géomètres pour lesquels ce terme correspond à une idée toute différente, qu'ils expriment par l'un des mots suivants : *écartement, inclinaison*, ou encore, *quantité dont une droite a tourné autour d'un point*. Cette idée paraît très-claire, et bien formulée en vue de la mesure des angles. Cependant je soupçonne que ces géomètres entendent, sous ces mots, que l'inclinaison des deux droites est prise dans un sens, plutôt que dans un autre ; sans quoi, cette inclinaison même serait quelque chose de vague : il y a effectivement mille manières de transporter une droite, dans l'espace, en la faisant tourner autour d'un de ses points, d'une position à une autre ; tandis qu'il n'y en a qu'une, dans un plan. Il est donc permis de croire que ceux qui identifient le terme d'*angle* avec celui d'*inclinaison*, ou avec toute autre équivalente expression, présupposent que cette inclinaison est estimée dans le cas où elle est *minimum*, c'est-à-dire dans le plan des deux droites considérées.

Mais, s'il en est ainsi, la pétition de principe signalée plus haut est toujours menaçante, et il est clair qu'une telle notion de l'angle ne peut pas servir de base à

la théorie du plan. Si, au contraire, cette expression n'a aucun des sens déterminés que je viens d'indiquer, ou, si elle en a un que nul ne peut faire connaître exactement, il paraîtra singulier que des géomètres aient voulu passer outre, et procéder, quand même, à la définition de l'égalité des deux angles, et, par suite, à celle de la perpendiculaire.

Suffira-t-il, comme l'a dit Lacroix, de le montrer aux yeux, en guise d'échantillon? Faudra-t-il, avec Duhamel, renoncer à trouver une notion plus simple ou seulement bien définie auparavant? Devrons-nous avouer qu'il y a là une lacune inévitable, une sorte de *désidératum*, impossible à satisfaire? Quelle que soit la réponse de la raison à une semblable question, il n'y avait pas lieu, ainsi que Duhamel et ses imitateurs l'ont fait, d'ériger cette imperfection initiale en véritable dogme ayant droit à notre respect : « L'important, proclament-ils en toutes « lettres, est de définir clairement l'égalité et l'addition « des choses; et cela est suffisant en même temps que « nécessaire pour les comparaisons..... Nous ne dirons « donc pas ce que c'est qu'un angle, — ce sont toujours « eux qui parlent, — mais ce qu'on appelle angles « égaux (1). »

Je réponds hardiment, au nom de la philosophie élémentaire, qu'une telle prétention n'est pas soutenable, et que la définition préliminaire d'une grandeur est indispensable, pour que l'esprit puisse se livrer à la comparaison de deux grandeurs de cette espèce. Peut-on raisonnablement demander à quelqu'un d'accepter sans répugnance qu'une chose, non définie, soit égale à

(1) Duhamel, *Des Méthodes*, 2e partie, p. 13.

une autre, qui ne l'est pas davantage ? Et ne verra-t-on pas qu'au fond on fait un cercle vicieux, des mieux caractérisés, quand on affirme qu'un angle *est plus petit* ou *plus grand* qu'un autre, si la définition n'en a pas été préalablement établie, et ne doit ressortir que de leur mutuelle comparaison (1) ?

On peut donc déplorer qu'il soit venu à la pensée de quelques savants de premier ordre, de proposer comme règle scientifique un procédé qui répugne à la logique sérieuse, d'une part, et qui, d'autre part, offre trop d'agrément et de commodité aux esprits superficiels, pour n'être pas adopté avec empressement et exploité par eux, jusque dans ses dernières conséquences.

C'est vainement qu'on essaie de fixer l'idée des choses, au moyen d'une phrase ou d'un mot, si cette idée ne correspond à rien de net ou d'universellement admis ; et, dans le cas particulier dont il s'agit, personne n'osera soutenir que le mot *angle* est de ceux qui ont une signification précise ou parfaitement connue, puisqu'un premier examen nous y a fait découvrir trois ou quatre idées différentes, et toutes incapables d'entrer parmi les éléments de la définition du plan, qu'on se propose de faire. Mais, efforçons-nous de saisir le sens rationnel de ce terme, et de le ramener à la juste valeur qu'il doit avoir, à l'origine de la science.

On peut, d'abord, se représenter une droite partant d'un point dans l'espace, quelle que soit la définition adoptée par la ligne droite ; on peut, ensuite, en imaginer une seconde partant du même point, mais distincte de la première. Ces deux droites, considérées ainsi et dans leur

(1) Chap. IV, fin.

ensemble, forment une figure, que l'esprit est porté à orner de tous les attributs qui sont l'apanage ordinaire de l'angle. Il y voit immédiatement les deux branches d'un compas, qu'on a ouvert, ou les deux bords d'un morceau de papier, découpé en pointe, ou les degrés circulaires qui limitent le rapporteur et le graphomètre.

Mais, rien ne nous oblige, en vérité, à céder à ce premier entraînement irréfléchi de la pensée; nous pouvons, si nous le voulons, écarter provisoirement d'une telle figure l'idée de surface, limitée ou illimitée, aussi bien que celle d'inclinaison mutuelle, et celle de quantité dont l'une des droites a tourné, autour de l'autre, soit dans leur plan, soit en dehors de ce plan. Si l'on fait, enfin, abstraction de tout ce qui n'est pas exclusivement l'une ou l'autre des deux droites, et si l'on consent à ne leur adjoindre aucun élément, étranger à leur stricte définition, on se trouve en face d'une figure, simple de forme, qui apparaît avec une existence propre et avec un degré de réalité aussi élevé que celui des droites mêmes qui la composent. Qu'on l'appelle *angle*, *inclinaison* ou *ligne brisée*, peu importe; ce qui reste d'une conception réduite à ces termes, c'est une figure géométrique définie par *deux droites, qui partent du même point et vont chacune dans un sens différent.*

Une semblable figure sera peut-être difficile à concevoir, lorsque chaque droite aura été définie elle-même par une propriété négative et abstraite, comme elle l'est par Duhamel; car, c'est à peine si, dans ce cas, l'idée de direction, et, à plus forte raison, celle de coïncidence, présentera à l'esprit quelque chose de saisissable. Mais, pour nous et pour tous ceux qui ne voient dans une droite, avec Legendre, que la propriété positive et

concrète d'être la plus courte longueur entre deux de ses points, toute difficulté disparaît, soit qu'il s'agisse de la définition nouvelle de l'angle, soit qu'il s'agisse de l'égalité par superposition de deux angles.

Il est tellement impossible, d'ailleurs, de se passer de cette définition de l'angle, quand on veut établir l'égalité des angles, que Duhamel lui-même, au moment où il proclame son dogme de l'abstention, se met précisément en flagrant délit d'infidélité à ses propres conseils. « Deux « droites qui se rencontrent, dit-il, font le même angle « que deux autres qui se rencontrent en un autre point, « quand on peut, en transportant l'un de ces systèmes, « sans y rien changer, faire coïncider les directions « de ces deux lignes avec les directions de celles de « l'autre (1). » Pour qui sait lire entre les mots, ce que l'auteur nomme un *système* n'est pas autre chose que ce nous venons d'appeler *angle*, et, en somme, sa définition en renferme deux, tout à fait distinctes l'une de l'autre, bien que confondues dans une seule et même phrase, savoir : celle de l'*angle*, et celle de l'*égalité* de deux angles. Au surplus, la clarté et l'élégance auraient tout à gagner, comme la logique, au dédoublement sincère de cette définition complexe, et l'on ne sait lequel des deux il faut le plus regretter, ou de ce contre-sens systématique ou de l'inutilité de ce contre-sens.

(1) Duhamel, *Des Méthodes*, 2e partie, p. 13 et suiv.

CHAPITRE VII

Définition exacte du plan

Après avoir défini l'égalité des angles, Duhamel admet la possibilité de mener une droite, qui soit perpendiculaire à une autre, c'est-à-dire qui fasse avec l'autre deux angles adjacents égaux; puis, il fait voir que la surface engendrée par cette perpendiculaire, tournant autour de l'autre, présente cette particularité d'être identique de forme de ses deux côtés. « Si, en effet, dit-il, on la « retourne, et qu'on fasse coïncider chacune des directions de la première droite, transportée avec elle, avec « la direction opposée à partir du point fixe, elle coïncidera avec sa première position, puisqu'elles seront « l'une et l'autre le lieu géométrique des perpendiculaires à une même droite par le même point (1). »

Ce raisonnement est assez peu fondé; car, qui dit *lieu géométrique*, dit figure qui contient ici toutes les perpendiculaires menées à la droite, par le même point,

(1) *Des Méthodes*, *ibid*.

et qui n'en contient pas d'autres. Or, il n'est pas question de cela dans la démonstration. L'auteur en tire d'ailleurs cette conséquence mal assurée, et exprimée en des termes qui signifient à peu près le contraire de ce qu'il veut dire : « il est évident que cette surface coïnci- « dera toujours avec elle-même, si on la déplace de « manière que les perpendiculaires qui l'ont engendrée « restent perpendiculaire à l'axe fixe. » Ce qu'il a l'entention de montrer par là, c'est que la surface, dont il vient de constater l'existence et qu'il appellera plan, est *unique*, c'est-à-dire que tous les plans engendrés par un mouvement se produisant dans des conditions analogues, quelles que soient la droite mobile et la droite fixe, sont superposables.

Voici maintenant comme il passe de sa définition à la définition classique du plan, et c'est là le point important. Il s'agit de prouver que sa surface jouit de cette propriété, qu'une droite y est contenue tout entière, dès qu'elle y a deux de ses points. « Considérons, dit-il, deux « points quelconques sur cette surface ; faisons passer « par ces points une ligne indéfinie, et suivons la à « partir d'un de ces points en marchant vers l'autre. « Comme, par sa définition, elle est semblable de tous les « côtés, et que le plan n'offre lui-même aucune dissem- « blance entre ses deux faces, de quel côté de la surface « peut-on concevoir que passe d'abord la droite ? Et elle « ne peut passer des deux côtés à la fois, parce qu'alors, « quand on serait arrivé au second point donné, on « aurait deux lignes droites passant par les deux mêmes « points, ce qui est admis impossible. »

« Comment donc n'admettrait-on pas comme évident « qu'entre ces deux points la droite est tout entière

« dans la surface ? Et l'on admettra aussi qu'elle n'en « peut sortir au-delà ; car, par les raisons déjà données, « si elle passait d'un côté, on serait fondé à admettre « qu'elle passe de l'autre, et l'on aurait encore deux « droites différentes qui auraient deux points communs ; « ce qui est contraire à la définition (1). »

Toutes ces idées et ces propositions paraissent à Duhamel ne devoir être l'objet d'aucune difficulté. Je suis presque de son avis; cependant, il est permis de se demander ce que c'est, pour une ligne, d'être *semblable de tous les côtés;* et pour un plan, de *n'offrir aucune dissemblance entre ses deux faces*. Non pas que je mette en doute ces qualités ; mais, de pareilles expressions sont d'un sens trop indécis pour qu'on puisse édifier, sur les idées qu'elles représentent immédiatement, une proposition aussi capitale. Duhamel entend, sans aucun doute, que l'espace homogène et continu est distribué symétriquement de part et d'autre de la surface, au moins dans le voisinage de cette surface ; mais il ne le prouve, ni ne dit formellement, et il ne peut pas le dire, ces parties de l'espace ne jouant à peu près aucun rôle dans sa démonstration. Il n'oserait pas davantage soutenir, avec Bertrand (de Genève), avec Vincent et avec M. Ricart, qu'un plan est partagé par une droite, ainsi que l'espace par un plan, en deux régions égales ou identiques, c'est-à-dire en deux parties telles, qu'on ne puisse rien dire de l'une qui ne puisse aussi bien se dire de l'autre; car, ces deux régions sont infinies en étendue, et, pour lui, l'identité ou l'égalité de deux grandeurs infinies est impossible à concevoir.

(1) *Des Méthodes*, *ibid.*

Il y aurait, au surplus, une objection à faire contre cette considération : si le plan était défini par cette propriété de partager l'espace en deux régions égales, il en serait de même d'un second plan, qu'on supposerait comme le premier, perpendiculaire à la même droite, et l'on arriverait à cette conséquence, que deux grandeurs infinies pourraient être égales et cependant différer d'une quantité infinie, ce qui est très-difficile à admettre, lorqu'on vise à affranchir la science de tout ce qui est pure conception métaphysique.

En résumé, la justification du plan, présentée par Duhamel, est mal dirigée et prête le flanc à la critique ; mais, il suffira d'y introduire, comme il suit, les notions positives, raisonnées et naturelles, qui découlent de la définition de la ligne droite, telle que nous l'a fait connaître Legendre, et qu'on ne retrouve plus dans celle de Duhamel, pour en former une démonstration logique et irréfutable.

On appellera *angle* la figure formée par deux droites, qui partent du même point et vont chacune dans un sens différent, abstraction faite de tout ce qui n'appartient pas à ces deux droites.

Si l'on retourne un angle, ainsi défini, de manière à ce que l'un de ses côtés vienne tomber sur l'autre, le sommet restant fixe, il y a coïncidence de la figure retournée avec la figure primitive. Cette coïncidence peut être admise, comme chose évidente, ou comme résultat des conséquences absurdes auxquelles on serait conduit, dans l'hypothèse contraire, après deux retournements successifs.

Supposons qu'on ait pris, à partir du sommet et sur les deux côtés d'un angle des longueurs arbitraires, mais

égales, et qu'on ait mené la droite qui passe par les deux extrémités de ces longueurs, puis celle qui va du sommet au milieu de cette droite. — Les anciens géomètres nommaient la première de ces droites, *base*, et la seconde, *médiane* de l'angle ; nous conserverons, pour abréger, ces dénominations. — Supposons donc qu'on ait mené la base et la médiane d'un angle, et qu'on fasse tourner la figure autour de la base ; la médiane décrit une surface qui est limitée, ou illimitée, suivant que la droite mobile est elle-même limitée, ou illimitée, et qui jouit, en outre, des propriétés suivantes :

1° *Tout point, situé sur la surface, est également éloigné des deux extrémités de la base.* En effet, considérons un point quelconque de la médiane ; admettons qu'on ait retourné l'angle et qu'on l'ait superposé à lui-même, la base sera retournée bout pour bout ; son milieu n'aura pas changé de place, la médiane non plus, puisqu'elle va du sommet au milieu de la base ; donc, le point considéré sur la médiane, et, par suite, tout point de la surface est également éloigné des deux extrémités de la base.

2° *Tout point, situé hors de la surface, est plus rapproché d'une des extrémités de la base que de l'autre.* La démonstration se tire, sans peine, de ce qui vient d'être dit et de la définition même de la ligne droite, considérée comme le plus court chemin d'un point à un autre.

On en conclut que la surface, engendrée par la médiane d'un angle tournant autour de sa base, est *le lieu géométrique des points qui sont également éloignés des deux extrémités de sa base.*

De plus, on peut s'assurer que ce lieu géométrique est aussi celui des points qui sont également éloignés de deux autres points quelconques de la base, équidistants

du milieu ; car, si l'on prend, sur la base de l'angle générateur, deux points, autres que les extrémités et équidistants du milieu, et qu'on les joigne au sommet par des droites, on forme un second angle qui sera retourné et superposé à lui-même en même temps que le premier. D'où il résulte que toutes les surfaces, obtenues par le même mode de génération, en partant d'une base et d'un angle quelconques, sont superposables, c'est-à-dire que la surface ainsi engendrée est unique.

Il reste à prouver que par rapport à la surface, dont l'existence vient d'être établie, l'espace est distribué symétriquement ; et cela, sans recourir à l'identité de forme, ce qui est vague *à priori*, ni à l'égalité de deux régions infinies, laquelle serait contestable, mais en s'appuyant seulement sur les notions de distance, déjà utilisées. Or, il est aisé de voir que, s'il y a un point, situé d'un côté, à des distances déterminées et inégales des deux extrémités de la base, on en peut trouver un second, situé de l'autre côté, qui soit aux mêmes distances inégales des extrémités, mais en sens inverse. La construction, pour trouver ce point, est des plus simples à exécuter, et la démonstration est facile à suivre.

Rien ne s'oppose maintenant à ce qu'on puisse appliquer le raisonnement indiqué par Duhamel, pour faire voir qu'une semblable surface jouit de cette propriété, qu'une droite y est contenue tout entière, si elle passe par deux de ses points ; la symétrique distribution de l'espace des deux côtés de la surface, qu'on vient d'établir, laisse alors à ce raisonnement toute la rigueur et tout le relief désirables.

Quant à la proposition réciproque, savoir, que toutes les surfaces sur lesquelles une droite peut être appliquée,

exactement et dans tous les sens, sont superposables entre elles, la démonstration en figure tout au long, dans Duhamel et dans les traités les plus élémentaires, sous la rubrique suivante : *Trois points, qui ne sont pas en ligne droite, déterminent un plan.* Et je n'y insiste pas.

Comme on le voit, il y a effectivement un lieu géométrique satisfaisant à toutes les conditions, imposées par la définition de Héron et de Legendre à une surface, pour qu'elle soit plane, et ce lieu est la surface engendrée par la médiane d'un angle, qui tourne autour de sa base. Aucune trace de la justification de cette définition ne se trouve dans les ouvrages anciens, non plus que dans Legendre, et c'est à Duhamel que revient l'honneur du premier essai dans ce sens (1). Mais, si l'on veut que cette justification soit vraiment irréprochable, il faut avoir soin de donner à la définition de l'angle la place et la valeur exacte qu'elle doit avoir au début de la science, et d'envisager seulement cette qualité positive de la ligne droite, d'être la plus courte longueur entre deux de ses points.

C'est pour avoir méconnu la portée rationnelle de cette première définition de la ligne droite, que les géomètres aujourd'hui sont embarrassés d'accepter la définition classique du plan. Peut-être doit-on assigner encore une autre cause, moins immédiate, à leur étrange hésitation ! On dirait, en effet, à voir certaines affirmations

(1) On trouve aussi, dans les *Notions préliminaires* des *Éléments de géométrie* de M. Ricart, parag. 13, 14, 15, 15, 17, une justification de la définition du plan. C'est la reproduction des idées de Duhamel, avec moins de simplicité et pas plus de rigueur.



qui se produisent dans les traités modernes, tantôt sous la forme dubitative, tantôt comme un cri désespéré de la raison, que la peur de l'infini, qu'on rencontre à chaque pas dans l'étude des mathématiques, s'est emparée de l'esprit de certains géomètres, et qu'elle trouble la netteté de leurs conceptions.

CHAPITRE VIII

Sens divers du mot infini

Quoique les hommes aient souvent de différentes idées des mêmes choses, ils se servent néanmoins des mêmes termes pour les exprimer. C'est là, d'après l'auteur de la *Logique du Port-Royal*, une des causes les plus ordinaires de la confusion de nos pensées et de nos discours. L'idée d'infini est certainement de cette catégorie ; car, il règne aujourd'hui la plus grande diversité parmi les opinions que les géomètres professent à l'égard de ce terme, appliqué à une ligne, à une surface, ou à un volume.

Pour quelques-uns, le mot *infini* signifie, *qui n'a point de bornes, qui est sans limites*. C'est ainsi que le mot a été compris par la plupart des géomètres anciens, et l'on peut dire que l'emploi de ce terme, comme simple adjectif, synonyme d'*illimité* et exprimant une qualité purement négative, relativement à ce qui tombe sous les sens, ne présente tout d'abord aucun inconvénient dans le langage scientifique.

D'autres géomètres, quelquefois les mêmes, à mesure qu'ils raisonnent sur ce sujet et qu'ils rencontrent plus

souvent l'infini dans leurs discours, ne tardent pas à sentir une peine extraordinaire à manier ce qui n'a point de bornes, point de limites ; leur infini devient alors un phénomène hors nature, une sorte de monstre invisible, très-gênant pour l'imagination, et dont il y a tout avantage à se débarrasser, dès le début de la science. Ils s'en débarrassent effectivement, en diminuant la portée du mot : ils appellent infini ce qui est plus ou moins grand, mais très-grand, sans s'inquiéter davantage de la manière dont cet infini est ou n'est pas terminé ; le mot *indéfini* remplace alors celui d'infini, et ne présente plus les mêmes inconvénients, sauf à être pris pour équivalent d'*indéterminé*.

Quelques géomètres enfin, plus hardis que les précédents, soutiennent qu'il n'y a pas lieu d'avoir peur de l'infini, fût-il doté de ses trois dimensions, que ce n'est rien ou presque rien, si ce n'est un espace imaginaire, une sorte de vide, dans lequel il n'est pas désagréable de penser qu'on peut être plongé, avec tout le reste de la création.

J'écarte de la discussion le terme *d'infini absolu ;* parce que, dans la bouche de ceux qui s'en servent, l'épithète d'absolu n'est là que pour renforcer le sens du mot précédent, pour en foncer la couleur et non pour la changer : l'infini absolu est ordinairement ce qui est infini, sous tous les rapports ; et il ne s'agit jamais, pour le géomètre, que de l'infini considéré sous un certain rapport, c'est-à-dire de l'*infini relatif*.

Les uns ne voient donc, sous ce mot, appliqué à une grandeur géométrique, que des qualités négatives ; les autres, que des qualités qui se distinguent à peine des propriétés du fini ; enfin, les derniers n'y trouvent que le néant. Je crois pouvoir démontrer, d'une part, que

tous se trompent, en ce sens qu'ils s'écartent plus au moins des règles posées pour les définitions spéciales de la géométrie, et qui conviennent à l'infini (1); d'autre part, que cette erreur est de celles qu'on appelle, dans l'école, *fallacia accidentis,* et qui consistent à *juger d'une chose absolument par ce qui ne lui appartient qu'accidentellement.*

(1) Chap. Ier.

CHAPITRE IX

L'infini et l'indéfini

« Toutes les sciences, a dit Arnauld, supposent des « connaissances naturelles, et elles ne consistent pro- « prement qu'à étendre plus loin ce que nous savons « naturellement (1). »

Ce qui veut dire que, la géométrie repose sur les données de la raison, tout autant que sur celle de l'expérience, et que, si l'observation nous fournit le germe des idées mathématiques, en nous faisant voir des choses *concrètes*, l'esprit s'empare de ces idées, les agrandit par l'imagination, les généralise et les complète par une conception, et, les dépouillant ainsi de ce qu'elles ont de matériel ou de particulier dans leur objet, les amène à cet état de perfection, qu'on nomme *abstrait*, où elles se prêtent merveilleusement aux combinaisons de l'analyse. Voilà la véritable logique des sciences mathématiques.

Il semble que, de nos jours, cette vérité se soit peu à peu obscurcie. Beaucoup de géomètres contemporains se

(1) *Logique ou Art de penser*, 4e partie.

sont tournés, avec la masse des hommes, vers le côté exclusivement pratique de la vie, et emploient toute leur attention à découvrir des applications nouvelles, sans souci des vérités premières. Ils perdent ainsi de vue, en s'éloignant des principes, et le véritable objet de la géométrie, qui est l'étude des propriétés de l'étendue intelligible, et le véritable esprit géométrique, qui consiste à mettre en jeu, dans cette étude, toutes les facultés de l'âme raisonnante, et non pas seulement une partie de ces facultés.

De même que le réel est devenu, pour quelques peintres incorrigibles, le dernier mot de l'art, de même pour ces géomètres, l'expérience est le suprême critérium du savoir ; ils n'accordent l'être qu'aux rapports des choses qui sont susceptibles d'être touchés du doigt, traduits par une expression sensible, ni plus ni moins que s'il s'agissait d'une science d'observation pure, et au grand détriment de la raison humaine. « Les sciences « mathématiques, ont-ils dit, sont des sciences d'expé- « rience et d'observation, uniquement fondées sur l'in- « duction des faits particuliers, de même que l'astrono- « mie, la mécanique, l'optique et la chimie (1) ».

Cela paraîtra d'autant plus étrange, qu'il y a beaucoup de choses, dans la géométrie et en dehors de la géométrie, que la plupart des géomètres admettent comme très-certaines, sans que nous puissions les figurer matériellement, ni même nous les représenter par l'imagination.

Lorsque je dis, avec Descartes : « Je pense, donc je suis », nul fantôme ou image corporelle ne peut servir à

(1) Dr Beddoes. *Observ. sur la nat. de l'évid. démonst.*

me faire concevoir ce que j'entends par ces mots : je pense, je suis. Il est impossible de s'imaginer une pensée, d'en peindre aucune image dans le cerveau ; l'idée de ma pensée et celle de mon existence se conçoivent donc indépendamment de toute image corporelle.

J'en dirai autant d'une multitude de figures géométriques, que l'on conçoit, sans qu'on puisse les tracer, ni les imaginer : ainsi, par exemple, nous pouvons tracer et imaginer un décagone régulier, inscrit à un cercle ; mais, nous ne pouvons tracer et nous n'imaginons pas un polygone régulier de 10 millions de côtés, inscrit au même cercle. Il est évident qu'un tel polygone, si on se le représente seulement par l'imagination, ne diffère pas du tout d'un autre qui aurait deux côtés de moins ou deux côtés de plus, parce qu'on ne peut apercevoir distinctement la figure d'un polygone, qui a un si grand nombre de côtés. Au contraire, je puis la concevoir et la concevoir très-clairement, puisque je peux en séparer et en démontrer toutes les propriétés, celle de ses angles intérieurs, de ses angles extérieurs, de ses diagonales, etc., sans aucune difficulté.

C'est donc par une confusion des choses que l'on imagine et des choses que l'on conçoit, confusion qui résulte d'une mauvaise direction habituelle donnée à leurs jugements, que quelques géomètres modernes en sont venus à ce point, de n'admettre, comme réel, que ce qui correspond à une image précise dans leur imagination. Ainsi que le disait Descartes, autre chose est d'imaginer et autre chose, de concevoir.

Sans doute, l'observation nous révèle d'abord les propriétés sensibles des corps, tels qu'ils sont dans la nature ; l'imagination peut ensuite, par l'opération

connue sous le nom d'abstraction, séparer ces propriétés des corps eux-mêmes, les isoler, les perfectionner, en vue de l'étude qu'en veut faire le géomètre. Mais, un tel résultat n'a encore aucune portée scientifique.

Pour que le géomètre puisse tirer parti de ces images dégagées de la matière, de ces idées isolées, il faut que son esprit se livre à un nouveau travail, il faut qu'il compare ces idées les unes aux autres, il faut qu'il s'assure que ce qui est vrai, dans un cas, l'est aussi dans un autre, et dans la multitude des cas qu'il peut concevoir, sans qu'il les rencontre jamais dans la nature.

Cette comparaison et ces jugements, qui en sont la conséquence, ne peuvent naître que par un mouvement de la raison, qui n'a rien de commun avec l'expérience ni avec l'imagination, et dont le résultat est pourtant aussi certain que les résultats fournis par les deux autres procédés.

Le géomètre, en effet, qui conclut que tous les angles droits sont égaux de ce que deux angles droits sont égaux, n'attend pas, pour tirer sa conclusion, que l'expérience ou l'imagination lui ait montré un grand nombre d'angles droits, qu'il trouve toujours égaux. Pourrait-elle d'ailleurs les lui montrer tous ?

Il conclut, sans aucun intermédiaire des sens, que le caractère d'égalité que son esprit découvre dans deux angles droits, les premiers venus à l'idée et jetés sur le papier, appartient à tous, s'il n'apparaît, dans la démonstration qu'il a faite, aucune raison pour qu'elle ne puisse se faire de même sur deux autres produits de la même espèce ; et, la rigueur de cette conclusion repose uniquement sur la certitude qu'il a, que tout esprit raisonnable ne pourra concevoir d'autres angles droits que les siens

propres, et y voir autre chose, sous le rapport de l'égalité, que ce qu'il y découvre.

Que l'on décore cette opération de l'entendement du nom d'induction, de généralisation, ou d'intuition, cela importe peu ; ce qui est important, c'est de remarquer qu'il y a là, pour tous les géomètres, un acte de l'intelligence pure, qui puise toute sa force en dehors des données de l'expérience et de l'imagination proprement dite, et par lequel on étend, sans hésiter et dès le début, à tous les angles droits, passés, présents, futurs, c'est-à-dire à tous les angles droits possibles, une propriété qu'on a reconnue et démontrée sur deux angles droits seulement. C'est dans cette extension de la pensée que se trouve la source de la première idée de l'infini, c'est-à-dire la vue de l'indéfini.

Malheureusement cette vue de l'indéfini est ignorée, méconnue ou mal pratiquée, par beaucoup de géomètres contemporains. Plusieurs se plaisent à confondre cette opération de l'esprit, qui nous découvre l'indéfini, avec l'analogie empirique, laquelle est le fond de la méthode propre aux sciences naturelles et n'a rien à voir dans la géométrie. D'autres s'arrêtent en route, par peur de rencontrer l'infini, après l'indéfini. Leur peu d'assurance philosophique se montre à chaque page, dans les rares chapitres où ils osent discuter sur l'infini.

« Une droite, prolongée à l'infini, a-t-elle encore des « extrémités ou n'en a-t-elle pas ? Si elle n'en a plus, « que sont-elles devenues ? En prolongeant une droite, « on éloigne ses extrémités, mais peut-on jamais les « enlever ? »

Car enfin « une droite ne saurait exister sans ses « extrémités, pas plus qu'un triangle sans ses angles et

« ses côtés. Supposer une droite sans extrémités, un « plan sans limites, c'est supposer l'absurde et l'impos- « sible (1). »

Telles étaient à peu près les objections des premiers Pyrrhonniens, contre la certitude géométrique, et telles sont encore les objections des modernes, qui assignent pour objet de la géométrie certaines propriétés des corps matériels.

Si l'auteur de ces demandes et de ces réponses veut dire, par là, qu'il n'a jamais vu un champ de blé sans limites, qu'il n'y a pas de route sur la terre qui n'ait un commencement et une fin, et que même la distance de notre globe à l'étoile la plus éloignée a encore ses deux bouts, il faut lui accorder qu'il a raison. On ne peut nier en effet, si l'on s'en tient au témoignage des sens, qu'une droite ne saurait exister sans ses extrémités, non plus qu'un plan sans ses limites. Mais, il y a loin de la raie visible et grossière, tracée sur le tableau noir ou sur le papier, à la ligne géométrique qu'elle est chargée de représenter à notre esprit. Notre esprit peut concevoir une longueur, sans largeur, bien qu'il n'en existe pas pour les yeux du corps; il conçoit de même les extrémités d'une ligne, bien que ces extrémités n'aient aucune espèce d'étendue.

Toutes les figures géométriques en sont là; et, pour rester dans les idées de l'auteur précité, comment peut-il accepter l'existence d'une droite mathématique, et surtout de ses extrémités? En a-t-il vu une seule, je ne dis pas prolongée à l'infini, mais ayant ses deux bouts? Jamais. Si donc, il n'en a pas vu qui ait ses deux bouts,

(1) H. Fleury, *Géométrie*, *Discours préliminaire*, passim.

pourquoi admet-il qu'il y en a? Et, s'il admet qu'une droite existe, bien que n'ayant d'autre raison d'être qu'une conception de son esprit, c'est qu'il lui attribue certaines qualités ; pourquoi n'admettra-t-il pas que cette droite puisse être prolongée, à son gré ou au mien, en demeurant telle qu'elle est dans la partie qu'il conçoit, c'est-à-dire sans altération de ses qualités, si ce n'est qu'elle gagne de plus en plus d'étendue en longueur?

Ne faut-il pas qu'il m'accorde aussi que, si loin qu'il pourra concevoir une droite ainsi prolongée, je peux la concevoir prolongée encore au-delà? Il suffit, comme l'a dit Leibniz, pour que cette production puisse se faire, « que la même raison subsiste toujours pour aller plus « loin (1) ; » or, c'est précisément ce qui arrive. Aucun obstacle ne peut venir du côté de mon esprit, sans quoi il l'aurait déjà rencontré la première fois que la conception s'est substituée à l'imagination, et il ne l'a pas rencontré. L'obstacle ne peut venir, non plus, du milieu dans lequel mon esprit opère ; car, ce milieu, qu'on nomme l'espace, est un élément passif, inerte, qui ne saurait opposer, à un moment donné, la moindre résistance à la raison agissant sans le secours d'aucune image matérielle. Rien ne s'oppose donc, si l'on peut concevoir une droite prolongée au-delà des limites assignées par l'imagination, à ce qu'on puisse la concevoir prolongée encore indéfiniment plus loin ; la droite devient alors la trace la plus simple et la plus positive de l'activité indéfinie de l'esprit humain.

Archimède avait déjà réussi à mettre cette vérité en évidence, malgré les sophistes de son temps. « Quant à

(1) *Nouv. Essais*, liv. II, chap. XIV.

« moi, dit-il, je vais faire voir par des démonstrations « géométriques, que parmi les nombres dénommés par « nous, dans les livres adressés à Zeuxippe, il en est qui « excèdent le nombre des grains de sable d'un volume « égal non-seulement à celui de la Terre, mais encore à « celui de l'Univers (1). » Et il le fait voir, à l'aide de la considération de deux progressions, l'une arithmétique et l'autre géométrique, dont la combinaison ressemble assez à la théorie actuelle des logarithmes vulgaires.

Mais, si perçante que soit la vue, si féconde que soit l'imagination, si puissante que soit la conception, il y a toujours un point auquel on s'arrête, et une ligne droite indéfiniment croissante n'est encore qu'une ligne droite finie ; c'est un simple cas particulier de la grandeur d'une droite, lequel en comprend une multitude d'autres, si l'on veut, mais ne les comprend pas tous, car il ne saurait comprendre aucune ligne droite dont la longueur serait plus grande ; et il y en a toujours une, du moment qu'on s'arrête.

Cependant cette vue de l'indéfini peut suffire, dans une certaine mesure, à l'étude ordinaire de la géométrie et de l'algèbre élémentaire. Les anciens s'en contentaient ; et l'on ne doit pas oublier, d'ailleurs, qu'il est tout à fait permis de ne faire entrer, dans la définition d'une figure, qu'une partie des propriétés de cette figure (2), pourvu que ces propriétés satisfassent aux conditions de rigueur. Sous ces conditions, une droite indéfinie pourra donc servir de point de départ provisoire à l'étude de la

(1) *Arénaire*. — Préface.
(2) Chap. Ier.

géométrie. Mais qu'arrivera-t-il, avec une semblable définition?

Dans la théorie des parallèles, on est tout de suite obligé de renoncer au sens conventionnel et restreint qu'on vient d'attribuer à une droite indéfinie ; car, il n'est personne qui veuille admettre que deux droites perpendiculaires à une troisième soient des droites qui se rencontrent très-loin. On démontre bel et bien que la rencontre de deux pareilles droites, s'opérât-elle indéfiniment loin, entraînerait une absurdité ; et, cette absurdité ne résulte pas d'une transformation progressive de la figure, elle est immédiate ; donc, elle implique une conception plus générale et plus étendue que celle de l'indéfini, elle suppose une nouvelle notion, qui n'est pas contenue dans la définition provisoire : c'est la vue simple, naturelle et directe de l'infini.

Dans les problèmes déterminés, l'infini se présente comme donnée ou comme solution de la question. Lorsqu'il se présente comme solution, voici quelle est la règle classique d'interprétation. Si la solution infinie donne directement la valeur de l'inconnue, on dit que la question proposée est absurde ou impossible, c'est-à-dire qu'elle est sans solution ; si la solution infinie ne donne pas directement la valeur de l'inconnue, mais seulement celle d'une inconnue auxiliaire, comme, par exemple, la tangente trigonométrique d'un angle, qu'il s'agit de déterminer, on excepte alors des solutions du problème le cas où l'angle est droit, ou bien l'on accorde que, pour plus de généralité, l'angle droit ne sera pas excepté, bien que répondant à une solution infinie. Cette règle devient ainsi très-générale et très-simple ; mais, il n'en est pas moins vrai que, prise au pied de la lettre, et dans

les mêmes circonstances, elle dit tantôt : « il n'y a pas de solution, » et tantôt : « il y a une solution. »

L'infini peut aussi se présenter autrement que comme solution d'un problème ; il peut se trouver dans les données mêmes de la question. Ainsi, par exemple, on peut se proposer de chercher le rapport de deux angles, l'angle étant, par définition, la surface plane comprise entre deux droites qui se rencontrent ; et l'on fait voir, dans la géométrie élémentaire, que le rapport de ces deux angles est égal à celui des deux arcs compris entre leurs côtés et décrits, avec le même rayon, de leur sommet comme centre. Quel sens peut-on raisonnablement attribuer à une telle proposition, si les côtés d'un angle ne sont pas considérés comme infinis en longueur, mais seulement comme indéfinis, ou bien comme indéterminés ? Il ne faut pas oublier que l'indéfini, au sens moderne, demeure plus ou moins indéterminé, bien que ces deux mots ne soient plus, comme ils l'étaient au XVII[e] siècle, parfaitement synonymes.

La même remarque s'applique à la bande parallèle, c'est-à-dire à l'aire plane infinie, comprise entre deux parallèles et le segment qu'elles interceptent sur la perpendiculaire commune, aire proportionnelle à ce segment.

Dans la théorie des limites, ce ne sera qu'avec des réserves extrêmes qu'on pourra procéder aux applications si nombreuses et si difficiles de cette théorie ; car, qui dit limite ne veut pas dire indéfiniment croissant ou décroissant : « Nous appellerons limite d'une variable, « dit Duhamel, une quantité constante dont la variable « s'approche indéfiniment, sans jamais l'atteindre (1). »

(1) *Eléments de calcul infinitésimal*, tome 1, p. 5.

D'où il suit, qu'il est impossible de passer d'une variable à sa limite, sans sortir de l'indéfini, c'est-à-dire sans se mettre en contradiction avec la définition provisoire (1).

Dans la question des séries, il faudra hésiter avec prudence devant chaque conclusion. Quelquefois, en effet, on considère les séries avec leur nombre de termes croissant indéfiniment, mais quelquefois aussi on les prend avec leur infinité de termes ; et, ce qui est vrai dans un cas, n'est pas toujours l'indentique de ce qui est vrai dans l'autre. Soit, par exemple, la série alternée des termes suivants :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots$$

Cette série est convergente et a pour somme ou total $l._2$. Or, il est manifeste que, si l'on additionne les termes positifs et si l'on en retranche les termes négatifs, quel que soit l'ordre dans lequel on opère, et pourvu qu'on ne néglige aucun terme, le résultat final doit rester le même, puisque le principe de l'addition algébrique est général et ne comporte point d'exception. Pourtant, l'on établit sans peine, en supposant que le nombre des termes soit indéfiniment grand, mais non pas infini, qu'on peut changer l'ordre des termes, de manière à ce que la somme en augmente, et même en augmente au point de rendre la série divergente, de convergente qu'elle était (2). Une pareille anomalie, et toutes les anomalies de ce genre, lesquelles ne sont pas rares, montrent bien

(1) V. plus loin, chap. XI.

(2) Lefébure de Fourcy, *Leçons d'Alg.*, chap. XXIII.

qu'il n'est pas permis de confondre, sous un seul et même terme, l'infini et l'indéfini.

Concluons de là, que la géométrie, bornée à l'indéfini, se trouve forcément amenée à faire des déductions qui manquent de généralité, parce qu'elle s'appuie sur des principes qui manquent de solidité ; elle se meut dans un champ qui est très-vaste, sans doute, mais qui demeure fermé de plusieurs côtés, ce qui est tout l'opposé de l'esprit scientifique par excellence.

Que si l'on veut avoir des premières figures une notion générale, qui embrasse tous les cas possibles et qui sauvegarde l'avenir, on sera obligé de former, avec la ligne droite et dès le début, un type plus universel que l'indéfini, et dont le géomètre puisse déduire, en toute sécurité et sans restriction aucune, les conséquences les plus variées, les plus particulières, les plus inattendues.

Pour cela faire, on procédera comme quand on s'élève philosophiquement de l'individu à l'espèce et de l'espèce au genre ; ainsi que le recommande, en très-bons termes, M. Waddington, dans ses *Essais de logique* (1), on éliminera de l'idée de ligne droite tous les éléments variables, accidentels, c'est-à-dire le plus ou moins de longueur individuelle dépendant de ses extrémités, et on y conservera ce qui est fixe, permanent, c'est-à-dire cette qualité qui fait qu'une ligne droite comprend toutes les autres, si longues qu'elles soient, et qui est d'être infinie en longueur.

« Une idée générale n'est telle, suivant Malebranche « et suivant la raison, que parce qu'elle implique l'infini « et en porte le caractère. On ne peut, en effet, se for-

(1) *Essais de logique*, Passim.

« mer des idées générales que si l'on trouve dans l'infin « assez de réalité pour donner de la généralité à ce: « idées. » De même aussi, avec M. Stuart Mill, « le: définitions géométriques doivent être considérées comme nos premières et nos plus évidentes généralisations relatives aux lignes et à toutes les figures, telles qu'elles existent (1). » On peut dire que c'est là une vérité saisissante et presque banale, car on trouve dans les manuels classiques de philosophie que les mots universel et infini sont synonymes : « nécessité, y est-il dit, infinitude, « généralité absolue ou universalité, tels sont les carac- « tères de cet autre ordre de connaissances (2). »

La ligne droite, pour être définie d'une manière générale et complète, devra donc toujours être envisagée comme n'ayant ni commencement, ni fin, c'est-à-dire comme se prolongeant à l'infini dans les deux sens. D'ailleurs, cette apparition originelle de l'infini, sous la forme de ligne droite, est remarquable en ce qu'elle en entraîne d'autres. Si l'infini en longueur est nécessaire au géomètre, il ne l'est pas moins en surface, en volume et en nombre ; car, tout ce qu'on peut dire en faveur du premier, s'applique théoriquement aux trois autres, tant au point de vue de la définition qu'au point de vue des démonstrations.

Et voici les conséquences qui en résultent.

Premièrement, une grandeur indéfiniment croissante n'est qu'une grandeur finie ; elle a toujours des limites ; elle peut toujours être exprimée par un nombre indéfiniment croissant.

(1) *Système de logique*, liv. II, chap. V.

(2) Saisset, *Manuel de philosophie*, *Psychol.*

Secondement, une grandeur infinie n'est ni croissante, ni décroissante ; elle n'a point de bornes, et il y a un intervalle immense, un abîme, entre une grandeur indéfiniment croissante, la plus grande, et une grandeur infinie. Elle ne peut être exprimée par aucun nombre, si grand qu'il soit.

Troisièmement, comme il importe de pouvoir représenter une grandeur infinie par un signe, dans le calcul algébrique, on a adopté universellement et depuis longtemps, pour ce signe, un 8 renversé. Mais, il est clair que ce signe unique, pour représenter l'infini en longueur, l'infini en surface, l'infini en volume et l'infini en nombre, est très-insuffisant.

Cette pénurie de signes, pour représenter l'infini, est la cause de beaucoup de confusions, qui surprennent et arrêtent les géomètres de l'avenir, et la première chose à faire pour renverser les obstacles, pour ouvrir la voie à la science de l'infini, sera de créer des notations spéciales, simples et variées, plus ou moins analogues à celles du calcul infinitésimal ; ces notations permettront de représenter distinctement les infinis de différents ordres, d'en étudier les rapports et de formuler les règles du calcul des infiniment grands, comme Leibniz le fit pour le calcul des infiniment petits (1).

(1) Leibniz avait préparé les matériaux d'un ouvrage, qui devait avoir pour titre : *De scientia infiniti*. M. le comte Foucher de Careil en a pu recueillir et publier quelques fragments.

CHAPITRE X

L'infini et le néant

Nous avons reconnu, dans le chapitre précédent, que la vue du fini conduit à l'indéfini, et celle de l'indéfini à l'infini. Quelques esprits aveuglés ont essayé de ramener toutes les questions de géométrie aux deux premiers termes, et de chasser l'infini de leurs raisonnements; mais, l'idée en reste, malgré tout, et il y a une foule d'applications ou l'indéfini, sans l'infini, ne suffit pas; à moins que, sous le même mot, on ne confonde à peu près les propriétés de l'indéfini et celles de l'infini proprement dit.

Beaucoup de géomètres modernes se contentent de cet à peu près, et vivent dans cette confusion, que Montaigne appelait *la piperie des mots;* d'autres ont plus de clairvoyance, et n'hésitent pas à tirer cette conclusion, que si l'infini et l'indéfini sont une seule et même chose, non-seulement l'infini ne sert à rien, mais cet infini n'existe pas; l'infini et le néant sont identiques.

On pourra s'étonner d'entendre affirmer, par des géomètres, qu'une quantité, qui devient si grande que

l'imagination en demeure confondue, n'existe pas. Que penser cependant de cette phrase que Duhamel, l'esprit le plus rigoureux parmi les géomètres contemporains, a laissé imprimer dans son traité *Des Méthodes*, il y a huit ans déjà, et qui n'a rencontré jusqu'à présent que de rares critiques : « Cet espace fantastique, dit-il, que l'on « semble croire destiné à recevoir les objets ou simple- « ment leurs figures, n'est pas une chose ; c'est l'absence « de toutes choses : c'est le néant (1). »

Soutenir que l'espace, en tant qu'étendue infinie, c'est le néant, me paraît être, quelle que soit la manière dont on entende les mots de la langue française, le plus fort paradoxe qu'on puisse énoncer en mathématiques. Est-ce parce que cet espace n'a d'autre preuve de son existence que la nécessité, qui s'impose à l'esprit du géomètre, de l'admettre comme réceptacle des figures qu'il imagine et qu'il conçoit? Mais comment nier cette nécessité ! « L'espace est aussi indispensable au géomètre que le « marbre au statuaire (2). » Serait-ce parce que cet espace ne peut nous apparaître, sans se montrer en même temps illimité, et que, « si l'on vient à y appliquer son « attention et à chercher à se rendre compte de son « existence, on se trouve saisi d'une sorte d'effroi, « comme il arrive toutes les fois qu'on veut sonder quel- « que mystère impénétrable à l'esprit humain (3) »? Mais cet effroi, ce mystère, est tout à fait particulier à Duhamel ; il ne tient d'ailleurs qu'à une confusion de mots et d'idées.

(1) *Des Méthodes*, 2e partie, paragr. 5.

(3) Liard, *Des Définit. géométr. et des Définit. empiriques*, chap. I, page 36.

(2) *Des Méthodes*, ibid.

Ce n'est pas de comprendre, mais de connaître l'infini qu'il s'agit. « L'infini est incompréhensible, comme Dieu « lui-même. L'homme peut et doit connaître Dieu, et ne « le peut comprendre. Nous ne comprendrons jamais « l'infini, lors même que nous parviendrons à connaître « plusieurs vérités claires sur la nature de l'infini et sur « ses rapports avec le fini (1). » Voilà le mystère; et voici le mystère dévoilé : c'est par la vue du fini et de l'indéfini, que nous arrivons à connaître l'infini. Mais pour atteindre le but, il y a un procédé logique à suivre. Il y a d'abord ce que dit Bossuet : « qu'outre nos idées « claires et distinctes, il en est de confuses et de géné- « rales qui ne laissent pas de renfermer des vérités si « essentielles qu'on renverserait tout en les niant. » Il y a surtout à se défendre de considérer sans cesse, dans les grandeurs finies, ce qui les caractérise en tant que finies, c'est-à-dire leurs limites, leurs accidents, et de prendre leurs imperfections pour la marque de l'infini. Chaque être est effectivement enveloppé de bornes qui en cachent le général, l'universel, et il saute aux yeux que la propriété d'être limité est une imperfection, pour une figure géométrique, en tout point semblable aux imperfections naturelles que nous rencontrons dans le monde physique; de telle sorte que la contemplation exclusive de ces imperfections ne peut nous conduire, au sujet de l'infini, qu'à un cercle vicieux, comme celui-ci : s'il y avait des lignes infinies, elles n'auraient point d'extrémités; or, toutes les lignes qu'on aperçoit ont des extrémités; donc, il n'y a pas de lignes infinies.

(1) A. Gratry, *Logique*, tome II, chap. v, p. 1.

Tel est bien, au fond, le raisonnement des géomètres modernes contre l'infini; tel est bien celui qui conduit Duhamel à assimiler l'infini au néant, j'allais dire à zéro; tel était à peu près celui de Cotta contre l'existence de Dieu, et que Cicéron nous rapporte dans le 3e livre de la *Nature des Dieux*. « Comment, dit-il, pouvons-nous conce-« voir Dieu, ne pouvant lui attribuer aucune vertu? Car « dirons-nous qu'il a de la prudence? Mais la prudence « consistant dans le choix des biens et des maux, quel « besoin Dieu peut-il avoir de ce choix, n'étant capable « d'aucun mal? Dirons-nous qu'il a de l'intelligence et « de la raison? Mais la raison et l'intelligence nous ser-« vent à découvrir ce qui est inconnu par ce qui nous est « connu; or, il ne peut y avoir rien d'inconnu à Dieu. « La justice ne peut aussi être en Dieu, puisqu'elle ne « regarde que la société des hommes; ni la tempérance, « parce qu'il n'a point de voluptés à modérer; ni la force, « parce qu'il n'est susceptible ni de douleur ni de tra-« vail, et qu'il n'est exposé à aucun péril. Comment « donc pourrait être Dieu ce qui n'aurait ni intelligence « ni vertu (1)? »

« Il est difficile, dit Arnauld, au sujet de cet argument, de rien concevoir de plus impertinent que cette manière de raisonner. Elle est semblable à la pensée d'un paysan qui, n'ayant jamais vu que des maisons couvertes de chaume, et ouï dire qu'il n'y a point dans les villes de toits de chaume, en conclurait qu'il n'y a point de maisons dans les villes, et que ceux qui y habitent sont très-malheureux, étant exposés à toutes les injures de l'air. C'est comme cela que Cotta raisonne, ou plutôt Cicéron.

(1) *Logique de P. R.*, édit. Jourdain, page 233.

Il ne peut y avoir en Dieu de vertus semblables à celles qui sont dans les hommes ; donc, il ne peut y avoir de vertus en Dieu. Et ce qui est merveilleux, c'est qu'il ne conclut qu'il n'y a point de vertu en Dieu, que parce que l'imperfection qui se trouve dans la vertu humaine ne peut être en Dieu ; de telle sorte que ce lui est une preuve que Dieu n'a point d'intelligence, parce que rien ne lui est caché ; c'est-à-dire qu'il ne voit rien, parce qu'il voit tout ; qu'il ne peut rien, parce qu'il peut tout ; qu'il ne jouit d'aucun bien, parce qu'il possède tous les biens (1). » En deux mots, Dieu n'existe pas, puisqu'il a toutes les qualités de l'être.

Sans doute, les géomètres modernes n'atteignent pas ce degré de précision dans leurs raisonnements contre l'infini, ni surtout de malice dans leurs intentions ; mais, il n'en demeure pas moins vrai que ce qui les empêche d'admettre l'existence de l'infini c'est qu'ils ne voient dans la création aucune ligne qui n'ait ses extrémités, aucun plan qui soit sans ses bords, aucun volume sans ses limites, et qu'il faudrait accepter qu'une grandeur pût être dépouillée de toutes ces imperfections du fini, bornes, limites, extrémités, pour être infinie. Ils arrivent ainsi, en ne se servant que de leurs sens, à ne voir autour d'eux que des quantités finies, tandis que Pascal, usant de son intelligence, n'y voyait que des infinités de toutes parts.

Evidemment, il se passe dans l'esprit des géomètres, qui concluent de la sorte, quelque chose d'étrange et d'anormal, au point de vue de la méthode. Au lieu de recevoir les idées simples, telles qu'elles se présentent,

(1) Œuvres d'Arnauld, tome XLI, page 324. *Logique.*

ils les défigurent par l'insuffisance ordinaire de leur attention; « ils les teignent de leurs qualités, en les contemplant, » comme dit Malebranche, et, parce que la nature ne leur fournit pas d'image d'une grandeur infinie, ils répugnent à admettre qu'il y en ait, ils s'habituent à s'en passer et finissent par affirmer, sinon par croire, qu'il n'y en a pas.

Mais, en supposant que les mêmes géomètres se trouvassent placés en face d'une grandeur infinie, auraient-ils à leur disposition aucun moyen de constater l'attribut caractéristique d'une telle grandeur? Pourraient-ils la comparer à quelque chose, puisque la nature, qui est leur seul critérium, ne leur en fournit aucun échantillon? Comment donc reconnaîtraient-ils une droite pour infinie, puisqu'il y a un abîme entre le fini de leurs méditations et l'infini! On peut croire, au contraire, que ceux qui nient l'infiniment grand, parce qu'ils n'en voient pas d'exemple dans la création, le nieraient tout aussi bien, s'ils l'apercevaient, ou, du moins, qu'ils le prendraient pour un monstre : c'est précisément ce qui arrive, et ce qui produit, chez plusieurs d'entre eux, cette sainte horreur de l'infini, dont parlait si spirituellement Fontenelle, à propos de ceux qui rejetaient la méthode infinitésimale de Leibniz.

Que faut-il faire pour sortir de là? Il faut que les géomètres français, dont l'esprit est libre et qui veulent aller en avant, examinent attentivement les soi-disant principes de l'école nouvelle, esclave de la philosophie de l'appel aux sens; qu'ils se décident à briser les chaînes que cette philosophie impose à la droite raison; la raison rendue à elle-même fera le reste. Elle leur montrera qu'en dehors des données de l'expérience, au-delà de la

portée de l'imagination, il y a une place immense pour les grandeurs que l'on conçoit, et que cette idée de grandeurs, croissantes ou décroissantes indéfiniment, ne peut recevoir sa complète satisfaction que par la vue de l'infini. Reculer devant cette vue, ce n'est plus raisonner ; c'est avoir peur.

CHAPITRE XI

L'infiniment grand et l'infiniment petit

On ne peut s'empêcher de signaler ici une contradiction très-singulière, dans la manière de voir de quelques géomètres contemporains. Il est clair que, si l'infiniment grand n'existe pas dans la nature, l'infiniment petit n'y est pas non plus. Comment se fait-t-il que les mêmes géomètres rejettent l'un et acceptent l'autre? Pourquoi consentent-ils à introduire l'indéfiniment petit dans le calcul, et à traiter sans répugnance de sa limite, qui est le zéro et qu'il n'atteint jamais, pas plus que la longueur indéfiniment croissante d'une ligne n'atteint l'infini?

Serait-ce, comme le veut Pascal, que « comme c'est « nous qui surpassons les petites choses, nous nous « croyons plus capables de les posséder. Et cependant, « il ne faut pas moins de capacité pour aller au néant « que jusqu'au tout (1). » Il me semble que celui qui aurait compris ce que c'est que le zéro, n'aurait pas de

(1) *Pensées*. Article Ier.

peine à connaître ce que vaut l'inverse du zéro, c'est-à-dire l'infini mathématique.

Allèguera-t-on que les géomètres parlent sans cesse de l'infini, mais que néanmoins ils pensent toujours au fini ? Cela n'est pas sérieux. Le géomètre qui dit d'une quantité qu'elle est infiniment petite, ne veut pas dire qu'elle est excessivement petite, c'est-à-dire sur le point d'échapper à la vue ; mais, qu'elle est positivement nulle, si on la compare à une quantité excessivement petite.

Soutiendra-t-on que le calcul infinitésimal ne s'occupe pas de l'infiniment petit, parce qu'il ne traite que de la grandeur indéfiniment croissante ou décroissante ; que, si l'on y conclut de l'indéfini à l'infini, c'est une conclusion purement déductive, comme le serait celle qui va du genre à l'espèce, ou de l'espèce à un cas particulier ? C'est là une vieille et grave erreur, qu'on peut réfuter en examinant, avec attention, le fond même de la méthode infinitésimale.

La méthode infinitésimale a deux procédés, celui des limites et celui des infiniment petits ; mais, au fond, ces « deux idées générales, les plus fécondes des sciences mathématiques sont intimement liées l'une à l'autre (1). »

Voyons d'abord en quoi consiste, dans toute sa simplicité, le procédé des limites. Vous inscrivez un polygone régulier à un cercle ; vous doublez le nombre de ses côtés, puis vous doublez encore. Vous pourrez, par la pensée, doubler toujours le nombre des côtés du polygone inscrit ; ce nombre peut croître ainsi sans fin, mais ne sera jamais infini. De même et en même temps, la longueur de chaque côté diminue sans fin, et n'est jamais nulle. Le

(1) Duhamel. Préf. des *Élém. de calcul infinitésimal.*

polygone, à son tour, et dans les mêmes conditions, s'approche du cercle indéfiniment, sans fin, mais jamais ne devient le cercle. Voilà une triple assertion, que personne ne peut contester, et qui nous met sous les yeux trois grandeurs finies, indéfiniment croissantes ou décroissantes, savoir : le nombre des côtés du polygone, qui marche vers l'infiniment grand ; la longueur de chaque côté, qui tend vers l'infiniment petit ; le polygone qui s'approche du cercle, sans parvenir à l'atteindre.

Y a-t-il quelque géomètre qui, arrivé là, consente à assimiler avec l'infini ce nombre des côtés du polygone, qui est indéfiniment grand ? Mais ce nombre, si grand qu'il soit, est encore fini ; de même, la longueur de chaque côté, si petite qu'elle soit, ne saurait être assimilée à zéro, car il y aurait contradiction à prétendre que cette longueur peut, en restant finie, atteindre sa limite qui ne l'est pas. Le polygone non plus ne peut devenir cercle, en restant polygone ; et d'ailleurs, ce n'est pas seulement par approximation qu'on dit que le cercle a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence par son rayon ; c'est mathématiquement vrai.

Si donc les géomètres concluent du polygone au cercle, ce n'est point par une application ordinaire, faite au cercle, d'une propriété des polygones, dans laquelle l'erreur est devenue si petite qu'elle soit négligeable ; ce n'est point une déduction, allant d'une vérité à son identique, ou du genre à l'espèce ; c'est un mouvement d'extension de la pensée, lequel n'a rien de déductif, puisqu'il nous entraîne d'une chose à une autre toute différente, et en quelque sorte du moins au plus, du plus bas au plus haut. C'est ce procédé de la raison qui consiste à trouver, au travers des variations du fini, un

élément fixe, permanent, à en dégager tous les éléments accidentels qui l'environnent et le masquent, et à reconnaître, par la suppression de toutes ces traces mobiles, ce qui reste vrai dans l'infini.

Dans le cas actuel, ce qui varie essentiellement, c'est la forme du polygone, dont on finit par ne plus tenir compte ; ce qui est invariable, c'est la figure du cercle, notion géométrique définie aussi claire que le polygone, et qu'on lui substitue : ce qui change, c'est le nombre des côtés du polygone ; ce qui est constant, c'est la multitude des éléments du cercle, qui ne sont pas seulement en nombre croissant indéfiniment, mais qui constituent une infinité proprement dite et actuelle, puisqu'ils déterminent réellement une infinité de tangentes différentes : ce qui est variable, c'est la longueur des côtés du polygone ; ce qui est permanent, c'est la simplicité des éléments du cercle, qui ne sont pas seulement très-petits comme ceux du polygone, ni plus petits que toute grandeur donnée, mais plus petits que toute grandeur possible, qui sont tous nuls en grandeur, comparativement aux côtés du polygone, et qui pourtant existent chacun séparément, puisque chacun d'eux détermine une tangente.

Dégageons maintenant la figure de tout ce qui lui est particulier, en vue de la propriété du cercle que nous voulons établir ; en d'autres termes, supprimons l'idée de nombre croissant, de longueur décroissante, de forme polygonale changeante, et nous aurons ce qui reste vrai *à la limite*, c'est-à-dire dans l'infini, savoir, que *le cercle a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence par son rayon*. Quelle que soit la forme qu'on donne à la démonstration, et cette forme est des plus variées, dans les traités classiques de géométrie, elle revient toujours à

ce qui vient d'être expliqué, et elle n'a pas d'autre valeur logique.

En quoi consiste maintenant le procédé des infiniment petits? Ce procédé prétend trouver la loi intime de la génération des lignes, c'est-à-dire la relation de position d'un point quelconque d'une courbe au point qui le suit immédiatement, dès que cette courbe est donnée. Une courbe est d'ailleurs donnée ou définie par son équation.

Soit donc $y = f(x)$ l'équation d'une courbe; si l'on mène par un point quelconque, dont les coordonnées sont x, y, et par un second point, dont les coordonnées sont $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, une sécante, on sait que la direction de cette sécante est égale au quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, et que ce quotient est fourni par la relation suivante :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + X \Delta x,$$

X étant une fonction de x et de Δx.

Cette relation contient, dans le second membre, deux termes, dont l'un $f'(x)$ reste fixe, pendant que la sécante tourne autour de son premier point d'intersection, dont l'autre $X \Delta x$ est variable, avec la position de la sécante, et s'annule, quand le second point, se rapprochant du premier, arrive à se confondre avec lui. Mais, par cette hypothèse, le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qui figure seul dans le premier membre, devient égal à ce qu'on cherche, c'est-à-dire donne la direction qu'il faut suivre, pour passer du point considéré à celui qui le suit immédiatement; donc, le terme $X \Delta x$ s'évanouissant, l'expression $f'(x)$ qui demeure seule, au second membre, fait connaître le rapport infinitésimal que l'on cherchait.

Comme on le voit, pour conclure d'un rapport entre des quantités finies à sa limite, en d'autres termes du fini à l'infini, le procédé infinitésimal consiste à découvrir, dans le rapport des deux différences finies, l'élément fixe, et à en séparer tous les autres, qui sont variables et caractérisent essentiellement le fini. En faisant l'hypothèse qui les annule, on les supprime, et l'on trouve ce qui reste vrai *à la limite,* c'est-à-dire dans l'infini.

On peut présenter sous des formes très-diverses le raisonnement qui précède ; mais, ce qui en ressort avec certitude, au point de vue philosophique, c'est que celui qui conclut ici, ne s'arrête pas à mi-chemin ; il va jusqu'au bout. Il lui faut que Δx s'annule rigoureusement, ainsi que Δy et $X \Delta x$; c'est bien de zéro qu'il parle, et à zéro qu'il pense, ce zéro limite des quantités qui décroissent indéfiniment, et qu'elles ne peuvent jamais atteindre. C'est cette limite qui est directement introduite dans le raisonnement, bien qu'il y ait un abîme entre elle et une quantité indéfiniment petite ; car, le théorème serait faux, si l'on supposait Δx excessivement petit, aussi peu différent que ce soit de zéro. Il serait donc puéril de soutenir que le calcul infinitésimal ne s'occupe que de la grandeur indéfiniment décroissante, quand la considération du zéro absolu y est, dès le premier pas, indispensable ; il ne le serait pas moins de prétendre que les conclusions du fini à l'infini sont purement déductives, puisque la méthode des limites nous offre précisément l'exemple du contraire.

Au surplus, n'est-ce pas de cet infiniment grand et de cet infiniment petit que veut parler Pascal, dont il trouve plaisant de nier l'existence, ou d'assimiler la nature avec celle du fini, quand il s'écrie dans son livre de l'*Esprit*

Géométrique : « C'est-à-dire, en un mot, que, quelque « mouvement, quelque nombre, quelque espace, quelque « temps que ce soit, il y en a toujours un plus grand « et un moindre, de sorte qu'ils se soutiennent tous entre « le néant et l'infini, étant toujours infiniment éloignés « de ces extrêmes (1). » Donc, pour Pascal, il y a des quantités finies. des quantités indéfinies en croissance ou décroissance, et toute grandeur, indéfiniment croissante ou décroissante, reste infiniment éloignée des deux extrêmes.

C'est aussi l'opinion de Leibniz, l'inventeur du calcul infinitésimal. « Pour moi, dit-il, dans une lettre à Fon- « tenelle, les infinis ne sont pas des touts et les infini- « ment petits ne sont pas des grandeurs. » Ces deux infinités, l'infinité en grandeur et l'infinité en petitesse, sont pour lui « les extrémités de la quantité, non comprises dans la quantité, mais en dehors de la quantité (2). » Pas moyen d'assimiler l'infini avec l'indéfini ; pas moyen de considérer le premier comme un cas particulier du second, et de voir un pur syllogisme dans le raisonnement par lequel on passe du fini à l'infini.

Un siècle avant Leibniz, Képler appliquait déjà le même procédé, inductif et non déductif, lorsqu'il découvrait les lois admirables qui portent son nom. N'est-ce point en observant quelques phénomènes, en notant avec intelligence un petit nombre des positions de la planète Mars, en faisant abstraction des apparences, des accidents provenant, soit de l'erreur des observations, soit

(1) Pascal, *De l'Esprit géométrique*, sect. 1.

(2) *Lettres inédites de Leibniz*, recueillies par M. le comte Foucher de Careil, p. 234.

des perturbations des phénomènes, qu'il est parvenu à donner sa formule elliptique pour les mouvements de Mars, présents, passés, futurs, et à la généraliser pour toutes les autres planètes? Ici encore, la raison passe d'un nombre fini et limité de cas, bien observés, à l'affirmation d'une loi générale et précise, s'étendant à l'infinité de tous les cas possibles; elle franchit un abîme, avec plus d'audace sans doute, mais le même absolument qu'en géométrie, lorsqu'elle passe dans ses conclusions du polygone au cercle, d'une série à sa limite, du fini à l'infini.

Ecoutez Taylor sur le même sujet. Il affirme, d'après Aristote, que « l'induction sert à l'acquisition de la « science, en ce qu'elle met en acte dans l'âme l'uni- « versel, d'où dépend la démonstration. L'universel « (synonyme d'infinitude), objet propre de la science, « n'est pas déduit du particulier, car tous les cas parti- « culiers possibles sont infinis, et l'on ne peut en avoir « qu'un nombre fini comme point de départ (1). »

C'est la même méthode que préconise Wallis dans son *Arithmétique des infinis*, ouvrage si estimé de Maclaurin et approuvé sans réserve par Laplace. Du reste, Laplace dit à plusieurs reprises, dans son *Introduction à la théorie analytique des probabilités*, que « la méthode la plus sûre « qui puisse nous guider, dans la recherche de la vérité, « consiste à s'élever des phénomènes aux lois, et des lois « aux forces. » Et encore : « L'analyse et la philosophie « naturelle doivent leurs plus importantes découvertes à « ce moyen fécond, que l'on nomme induction. Newton

(1) Taylor, *Methodus incrementorum*, ann. 1715.

« lui est redevable de son théorème du binôme et du « principe de la gravitation universelle (1). »

Newton affirme lui-même, dans son livre des *Principes mathématiques*, que « dans cette philosophie, les propo- « sitions sont tirées des phénomènes et généralisées par « l'induction (2). » Et il écrit ailleurs que ces mêmes propositions, qu'il dit avoir trouvées par induction, il les doit en majeure partie à son analyse nouvelle, à son analyse cachée, à son calcul des fluxions ; en termes plus clairs, au calcul infinitésimal.

Aujourd'hui, et, malgré les objections de Fermat, malgré la tentative de Lagrange, pour « dégager les « principes du calcul différentiel de toutes considérations « d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites ou de « fluxions, et les réduire à l'analyse algébrique des quantités finies (3), » il y a peu de mathématiciens qui, sciemment ou non, ne fassent un perpétuel usage du procédé de Leibniz, quand il s'agit de l'infiniment petit ; parce que, comme le dit excellemment M. Cournot « la « nature des choses et les lois de l'entendement exigent « ici l'emploi de l'une de ces notions auxiliaires, dont le « simple développement, par l'algèbre, du principe d'i- « dentité, ne peut tenir la place. La méthode infinitési- « male de Leibniz ne constitue pas seulement un artifice « ingénieux ; elle est l'expression naturelle du mode de « génération des grandeurs physiques, qui croissent par « éléments plus petits que toute grandeur finie (4). »

(1) *Théorie analytique des probabilités*, 1812.

(2) Newton, *Principia mathematica*, p. 530.

(3) C'est le sous-titre qui accompagne son *Traité des fonctions analytiques*, 1795.

(4) *Essai sur les fond. de nos connaissances.*

Qui ne voit, en résumé, que les géomètres contemporains, qui, cédant à l'influence d'une philosophie incomplète, persistent à nier et à pourchasser l'infiniment grand, se mettent en contradiction, non-seulement avec la raison, mais encore avec eux-mêmes et avec les traditions les plus pures de la doctrine mathématique (1)!

(1) Voy. les belles pages du P. Gratry sur l'induction ou procédé dialectique. *Logique*, 4e livre, sept chap. entiers.

CHAPITRE XII

L'infini expérimental et l'infini imaginaire

Les trois actes essentiels de la raison, pour faire de la géométrie, sont l'observation, l'imagination et la conception. Ces trois opérations correspondent aux trois degrés de la connaissance, déjà distingués par Platon, et que Newton expose avec précision, dans son immortel ouvrage des *Principes*, savoir : le degré empirique, le degré mathématique, et le degré philosophique (1). La succession et le concours de ces trois mouvements de la pensée sont la mise en œuvre indispensable, dans le développement de la science : supprimez l'un des trois, et l'esprit qui raisonne, se trouvant mal équilibré, risque de tomber dans l'erreur ; si la suppression se transforme en habitude, la situation de l'âme pensante devient analogue à cet état pathologique, que les médecins qualifient de *manie*. Les productions de l'esprit peuvent alors revêtir les formes les plus extravagantes.

(1) Newton, *Principia mathematica*.

Quelques penseurs, parmi lesquels il faut citer Jean Reynaud, ont, dans la première moitié du siècle, exalté les spéculations de la raison pure et de l'imagination, au détriment de l'expérience (1); ils ont abouti finalement à soutenir l'infinité de l'Univers, dans le temps, dans l'étendue, dans le nombre, ce qui est la plus belle et la plus généreuse des erreurs, mais une erreur.

Ce cas est rare; et, au contraire, les penseurs modernes pèchent en général par excès de confiance dans l'observation et l'imagination. Ce défaut se remarque aujourd'hui, comme au temps de Descartes, particulièrement chez les géomètres. « L'étude des mathématiques, « dit l'auteur du *Discours sur la méthode*, nous rend im- « propres à la philosophie, nous désaccoutume de l'usage « de notre raison et nous empêche de suivre la route « que sa lumière nous trace. » Ce que j'interprète ainsi : les trois opérations de l'esprit, indiquées plus haut, sont nécessaires au travail fécond du géomètre; s'il s'attache à la pratique exclusive de l'une ou de l'autre, la troisième en souffre, et, par contre, l'ensemble des trois; de même qu'une terre s'épuise par la culture perpétuelle de la même semence, mais reste féconde sagement amendée. Quant à ce que peut l'union de la philosophie et des mathématiques, c'est-à-dire la pleine culture de l'intelligence, Descartes en est lui-même la preuve, avec Newton, Leibniz, Képler et Platon.

Je citerai deux exemples frappants de l'usage immodéré qu'on peut faire de l'observation et de l'imagination, dans la méthode géométrique. Le premier est ce

(1) *Terre et Ciel*, œuvres choisies, 1 vol., 1864.

que j'appelle *l'infini expérimental,* c'est-à-dire l'infini démontré ou supprimé au gré de l'expérimentateur.

Les géomètres ont longuement et vivement discuté au sujet de cette proposition, qu'Euclide demandait qu'on lui accordât, sans démonstration, et que voici :

Deux droites tracées sur le même plan, dont l'une est perpendiculaire et l'autre oblique à une troisième droite, doivent se couper, si on les suppose prolongées à l'infini.

Ce postulatum n'est pas une proposition évidente, comme quelques-uns l'ont prétendu ; il n'est pas non plus impossible à démontrer, comme d'autres le soutiennent ; c'est tout simplement une proposition difficile à établir, parce que la considération de l'infini s'y rencontre pour la première fois, dans l'étude de la géométrie élémentaire, et non pas seulement en soi, mais dans le rapport de deux infinis. La question exige, pour être résolue, le concours de toutes les facultés de la raison, savoir : observation, imagination, conception, et aussi quelques règles, qui sont encore à formuler, du *calcul infinital* de l'avenir.

A coup sûr, l'expérience seule, même aidée de l'imagination, demeure impuissante à lever la difficulté. Or, voici qu'un géomètre prétend la trancher d'un seul coup, en démontrant expérimentalement que le postulatum est faux, et qu'il faut s'en passer. « Pour que l'erreur soit « évidente et incontestable, dit-il, il suffit que je présente « un exemple dans lequel deux droites non parallèles, « ou une perpendiculaire et une oblique à la même « droite, ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin « qu'on les prolonge. Cet exemple ne sera pas difficile « à trouver : la figure même nous le met devant les « yeux.

« Pour le bien voir, le bien suivre et le bien com-
« prendre, supposez que vous regardiez cette figure à
« travers une loupe qui ait la propriété de la grossir
« graduellement et indéfiniment. Que verrez-vous alors ?
« Une perpendiculaire et une oblique qui grandiront
« indéfiniment, sans jamais se rencontrer, puisqu'elles
« s'éloignent toujours, au lieu de se rapprocher.

« En d'autres termes, si la figure grandit en conser-
« vant toujours les mêmes proportions, la perpendicu-
« laire et l'oblique grandiront infiniment sans jamais se
« rencontrer, puisque leur distance grandit dans le
« même rapport que les deux droites. »

« Le postulatum d'Euclide est donc une proposition
« fausse (1). »

Ainsi, pour parler la langue ordinaire, une perpendiculaire et une oblique à une droite, qui font entre elles un angle de 20 degrés, ne se rencontrent jamais. Que faut-il répondre à un semblable raisonnement ? Ne voit-on pas d'abord qu'on pourra, par ce procédé, démontrer que toutes les propositions de la géométrie sont fausses ? Vous croyez, par exemple, qu'une circonférence de cercle, qui passe par trois sommets consécutifs d'un polygone régulier, va passer par le quatrième ; mais, attendez un peu, et veuillez regarder avec une loupe, vous apercevrez un intervalle très-grand, entre l'arc qui s'avance et le quatrième sommet. L'arc aura beau s'avancer ; si la loupe grossit suffisamment, l'intervalle ne diminuera pas, et même il pourra s'accroître, au point de vous donner

(1) H. Fleury. — *La géométrie affranchie du postulatum d'Euclide*, 1869.

le droit de conclure juste le contraire de ce que les pauvres gens ont l'habitude de penser.

L'auteur de cette démonstration objectera peut-être, que l'exhibition de sa loupe n'est qu'une manière de rendre la chose plus saisissante, et qu'elle peut être remplacée par un simple effet de l'imagination, par une sorte d'effort d'esprit qui consisterait à nous faire voir les choses autrement qu'elles ne sont? Mais il oublie que, si, par une opération quelconque, notre esprit vient à amplifier une partie de la figure, le même esprit aura la force d'amplifier, par le même moyen et à la même heure, tout le reste de l'univers; et alors, cette distance, qui ne lui paraissait grande que par comparaison avec son état primitif, ne le sera plus. L'effet produit, par son instrument d'optique ou de métaphysique, est donc nul, et le plus grossier des obstacles ferait mieux son affaire, pour empêcher la rencontre des deux lignes.

Enfin, s'il était possible de juger de la vérité d'un théorème de géométrie par le seul témoignage des yeux ou de l'imagination, on devrait préférer la vue simple à une paire de lunettes et le simple bons sens à l'imagination; on diminuerait ainsi ses chances d'illusion. Or, en plaçant l'œil au pied d'une oblique, menée à une droite, et en en suivant du regard la direction, quelque petite que soit l'inclinaison, il n'est personne qui n'aperçoive le point précis, où cette oblique rencontrera une perpendiculaire quelconque, élevée sur la même droite. C'est ainsi qu'on détermine pratiquement, en y faisant planter un jalon, le point de rencontre de deux droites, dans l'arpentage.

Qualifions donc la chose comme elle le mérite : démontrer ou supprimer l'infini, dans les conditions de l'énoncé du postulatum d'Euclide, en amplifiant ou diminuant les

distances à l'aide d'un verre de lanterne magique, ce n'est plus faire de la géométrie, mais de la vraie fantasmagorie.

Le second exemple que je citerai se rattache, comme le précédent, à la théorie des parallèles ; mais, tandis que le premier nous montre l'abus et l'impuissance de l'appel aux sens, quand il s'agit de l'infini, le second nous fait voir les dangers que court l'imagination, lorsqu'elle se donne carrière, dans les mêmes questions, sans s'appuyer sur l'expérience et la raison. Je veux parler de la géométrie nouvelle, qu'on oppose à celle d'Euclide et qu'on qualifie, pour bien l'en distinguer, de géométrie *non Euclidienne* ou *imaginaire*. Elle vaut la peine qu'on l'examine, et dans son principe et dans ses résultats.

Lobatcheffsky, géomètre russe, qui passe pour en être l'inventeur, pose d'abord quinze propositions de géométrie, plane ou non plane, dans lesquelles figure la considération de l'indéfini, de l'infini, de limites et de parallèles, avec le sens ordinairement attribué à ces mots. L'établissement de ces quinze propositions ne suppose pas le théorème de la somme des angles d'un triangle rectiligne, ni l'égalité des angles correspondants ; c'est-à-dire que leur vérité paraît indépendante du postulatum d'Euclide ou du postulatum des programmes officiels, savoir : *Par un point donné, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée* (1).

La seizième proposition de Lobatcheffsky est ainsi conçue :

Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite

(1) *Plan d'études des Lycées*. Progr. nº 2, cl. de math. spéciales.

donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites qui coupent *la droite donnée, et en droites* qui ne la coupent pas. *La droite qui forme* la limite *commune de ces deux classes est dite* parallèle *à la droite donnée* (1).

Cette proposition est complexe : elle renferme la défition Euclidienne des parallèles, avec le postulatum officiel tout entier ; en outre, l'auteur explique qu'elle renferme encore une autre hypothèse, qui est le contraire du postulatum officiel, qui n'est pas plus démontrée que lui, mais qui, précisément parce qu'elle est incertaine, a les mêmes droits d'entrée au syllogisme.

Il y a cependant, entre les deux hypothèses, une différence capitale.

Le postulatum officiel correspond à une figure, dont la possibilité est démontrée par les quinze premières propositions admises ; la construction d'une parallèle à une droite donnée, *peut* se faire à l'aide de deux perpendiculaires ; cette construction ne donne d'ailleurs qu'une seule parallèle, et il n'y a vraiment *postulatum*, qu'en ce sens qu'il faut accorder que tous les autres procédés de construction donneraient la même parallèle.

Tandis que, les quinze premières propositions admises ne prouvent pas du tout la possibilité de cette seconde *classe* de droites, qui, pour la plus grande gloire du postulatum nouveau, *ne coupent pas* la droite donnée, non plus que l'existence d'une *limite* commune aux deux classes. Le mot *limite* y est même singulièrement détourné de son sens habituel, lequel suppose toujours une quantité variable et une quantité fixe, dont celle-là s'approche indéfiniment, sans pouvoir jamais l'atteindre.

(1) *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*, trad. de Hoüel.



Si bien que, ni l'expérience, ni l'imagination, ni la conception, ne permettent de faire correspondre aucune figure *possible* et *unique*, si ce n'est la figure Euclidienne, au postulatum non Euclidien. Une telle proposition possède donc, au plus haut degré, tous les défauts que peut réunir une définition géométrique ; la logique et l'enseignement classique doivent la repousser, c'est une monstruosité.

Mais, prenons ce postulatum tel qu'il est, admettons comme possible ce qu'il nous propose, et comme rigoureuses les déductions qui s'en suivent, et jugeons les résultats. L'auteur en tire d'abord, que les parallèles d'Euclide peuvent se rencontrer, et que les siennes propres ne se rencontrent pas ; cela va sans dire. Il en tire, que la somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux droits, peut être égale à deux droits, ou plus petite que deux droits ; cela devait être. A partir de là, toutes les conséquences sont ainsi à double face ; l'une des faces, nous montrant la géométrie Euclidienne comme un cas particulier compris dans la théorie, et l'autre, nous dévoilant les mystères d'une géométrie nouvelle et soi-disant plus générale que la géométrie classique.

Il n'est pas commode, au géomètre non Euclidien, d'appuyer ses démonstrations sur une construction graphique ; c'est pourquoi, il se hâte d'appeler à son secours les ressources de l'algèbre. Il rencontre, au bout de sa plume, une ligne nouvelle, qui n'existe pas dans la nature, qui a quelques propriétés du cercle, mais qui n'est pas un cercle ; il la nomme *horicycle*. Voici une surface, qui n'existe pas non plus dans la nature, qui tient de la sphère, sans être une sphère ; ce sera une *horisphère*.

Pour loger ces figures imaginaires, horicycle, horisphère, il a besoin d'un espace qui ne soit pas l'espace ordinaire, physique ou métaphysique, des géomètres ; il invente *l'hyperespace*.

Mais, qu'est-ce enfin que cette nouvelle ligne, cette nouvelle surface, ce nouvel espace ? De même, a-t-on dit gravement, qu'il existe plusieurs sortes de lignes à courbure constante, dont le cercle et la ligne droite sont des cas particuliers, et plusieurs sortes de surfaces à courbure constante, dont la sphère et le plan sont des cas particuliers, de même « ne peut-on pas, en se plaçant au point « de vue d'un espace à quatre dimensions, concevoir et « étudier plusieurs espaces à trois dimensions, jouissant « de quelques propriétés communes, que l'on appellerait, « par analogie, espaces à courbure constante, et parmi « lesquels l'espace physique, dont nous faisons la géomé- « trie, et qui est défini par l'axiome de la ligne droite « et par le postulatum d'Euclide, serait analogue au plan « dans les surfaces de courbure constante (1) ? »

L'imagination, dirons-nous avec Pascal, « ne donne aucune marque de qualité, marquant de même caractère le vrai et le faux (2). » Pour apprécier ces vérités nouvelles, non pas au point de vue des combinaisons numériques ou algébriques, mais comme science des lieux géométriques non mesurés, il faut donc mettre en jeu une puissance autre que celle de l'imagination.

Or, M. Bertrand, de l'Institut, a démontré, en combinant les propriétés regardées comme nécessaires de cette

(1) Liard. — *Des définitions géométr. et des définitions empiriques*, chap. I.

(2) *Pensées*, art. III.

géométrie avec les règles également nécessaires du calcul différentiel et intégral, qu'il n'existe que trois espèces de lignes partout superposables, chacune à elle-même : la circonférence du cercle, la ligne droite et l'hélice proprement dite. D'un autre côté, il n'y a que deux surfaces dont chacune soit partout superposable à elle-même, en tous points et dans toutes les directions : la surface de la sphère et le plan. Quant à la surface du cylindre circulaire droit, sur laquelle rampe l'hélice, elle n'est point superposable à elle-même, dans tous les sens possibles ; elle ne l'est qu'en glissant parallèlement à son axe ou en tournant autour de lui, ou encore en exécutant ces deux mouvements à la fois, comme la vis dans son écrou (1).

Il en résulte que l'horicycle et l'horisphère, qui naissent dans la géométrie nouvelle avec cette seule et unique qualité d'être partout superposables, chacune à elle-même, sont des figures qui ne correspondent à rien de réel, ni dans la nature, ni dans la raison ; l'hyperespace, inventé pour les recevoir, devient dès lors un lieu imaginaire, tout à fait inutile, outre qu'il est impossible à concevoir. La géométrie imaginaire tout entière n'a donc aucun titre, quant à ses résultats, pour faire partie de la science réelle de l'étendue.

Cela explique suffisamment pourquoi, depuis six mille ans qu'il y a des hommes, et qui pensent, aucun ne s'est encore aperçu de l'existence de l'hyperespace, et pourquoi tous se sont contentés de figures géométriques à trois dimensions.

Cependant il s'est trouvé des géomètres qui ont tenté

(1) Voy. Carton. *Vrais principes de la géom. Euclidienne*, 1870.

d'établir, soit directement, soit indirectement, le principe de la nouvelle géométrie.

Quelques-uns se sont adressés à l'algèbre.

L'algèbre est un instrument de précision, qui permet de photographier instantanément une loi, qu'on veut représenter ou développer dans ses conséquences ; mais encore faut-il que cette loi existe, qu'elle ait été conçue, analysée préalablement dans son essence ; ce qui implique une justification de cette loi, antérieure à l'exhibition des symboles algébriques.

L'algèbre fournit aussi, par la force même de ses transformations abstraites et générales, des résultats qu'on ne lui avait pas demandés, des solutions complétement inattendues et étrangères au problème résolu ; mais, ces solutions ne sont jamais acceptables, ni acceptées, que sous le bénéfice d'une interprétation possible ; et, en retour, un examen attentif de la question les fait toujours prévoir.

L'algèbre ne découvre donc, que ce que l'on a déjà vu et son identique, ou ce que l'on aurait pu voir et son identique ; et, elle est par elle-même incapable de montrer, de quelque façon que ce soit, un principe qui échapperait à une analyse directe et raisonnée.

D'autres géomètres ont voulu puiser dans la nature intime de la ligne droite, dans sa manière d'être relativement à ses points à l'infini, des considérations favorables au principe non Euclidien. Ces considérations quelles sont-elles ? M. Battaglini, dans les comptes-rendus de l'Académie des sciences de Naples, s'exprime ainsi :

« Suivant Lobatcheffsky, la ligne droite, à partir d'un « de ses points *o*, s'étend à l'infini de part et d'autre de



« *o;* mais ses deux points à l'infini des deux côtés « opposés de *o*, sont distincts l'un de l'autre, de telle « sorte que l'on ne pourra passer, sur la droite, d'un « côté de *o* à l'autre, si l'on ne passe par *o* dans *l'étendue* « *finie* de la droite (c'est-à-dire, si l'on ne va des valeurs « positives aux valeurs négatives de la distance *z* d'un « point *p* de la droite au point *o*, en passant par zéro), « ou bien si l'on ne traverse *une étendue idéale de la* « *droite au-delà de l'infini* (en faisant passer *z* par des « valeurs imaginaires). »

« Suivant Euclide, au contraire, la ligne droite s'éten- « dant encore à l'infini de part et d'autre d'un quelconque « de ses points *o*, ses points à l'infini, des deux côtés « de *o*, coïncident entre eux, ce qui revient à dire que « la ligne droite est *une ligne indéfinie, rentrante en* « *elle-même;* de sorte que l'on pourra se transporter, « sur la droite, d'un côté de *o* à l'autre, en passant soit « par *o*, soit par le point de la droite situé à l'infini « (c'est-à-dire que l'on ira des valeurs positives aux « valeurs négatives de *z*, en passant soit par zéro, soit « par ∞) (1). »

Ce développement des propriétés intimes de la ligne droite n'est pas très-clair. Voici comment l'interprète fort spirituellement M. Abel Transon, membre de la Société Philomatique de Paris :

« Deux philosophes, dit-il, ayant longuement disputé sur un point sans pouvoir se mettre d'accord, se séparent en se tournant le dos, et alors, chacun suivant une pensée contraire à celle de l'autre, ils s'éloignent de plus

(1) Note sur la *Géométrie imaginaire*. *Nouv. annales de mathématiques*, mai et juin 1868.

en plus sans quitter une même droite qu'ils parcourent dans ses deux directions opposées. Or, on leur certifie d'une part, au nom d'Euclide, que s'ils continuent de marcher *indéfiniment* dos à dos, ils se rencontreront face à face ; ce qui les étonne ! — Et, d'autre part, Lobatcheffsky survient, déclarant qu'en effet, marchant toujours ainsi, ils ne manqueront pas de se rencontrer, mais seulement *après avoir traversé une étendue idéale de la droite au-delà de l'infini ;* ce qui les effraie ! — D'ailleurs, ils entendent des assistants dire que les géomètres sont toujours clairs et les métaphysiciens toujours obscurs ; ce qui les renverse (1) ! »

Je commence par déclarer que la doctrine d'Euclide, relativement à la ligne droite, se trouve ici un peu défigurée. Euclide n'a jamais dit qu'une droite, prolongée indéfiniment, finissait par rentrer en elle-même ; sa définition a été citée, commentée, analysée par nous, et nous n'y avons trouvé rien de semblable ; il appelle d'ailleurs parallèles deux droites qui, prolongées à l'infini, sur un plan, ne peuvent pas se rencontrer (2).

Pascal, il est vrai, a écrit au sujet de l'infini, que « les extrémités se touchent et se réunissent à force de s'être éloignées ; » mais il ajoute qu' « elles se retrouvent en Dieu et en Dieu seulement (3). » Par quoi il veut dire, et il l'a souvent exagéré dans les termes, que notre intelligence est bornée, et que Dieu seul est capable d'avoir la vue exacte des deux infinis, entre lesquels l'homme est placé. Ces mots de Pascal ne s'appliquent donc, en aucune

(1) Abel Transon. *L'infini ou Métaphys. et Géom.*, 1871.

(2) Chap. II.

(3) *Pensées. — Les deux infinis.*

façon, à ce que devient la ligne droite indéfiniment prolongée, comme cela ressort, du reste, de toute l'exposition de la Géométrie de Port-Royal, à la rédaction de laquelle il n'a pas été étranger. Au surplus, je ne pense pas que les auteurs de la géométrie nouvelle veuillent s'autoriser de Pascal.

L'idée qui nous reste de la définition complète de la ligne droite, c'est d'abord que cette ligne a une existence propre et précédant celle du plan ; ensuite, qu'elle s'étend indéfiniment à partir d'un de ses points, si bien qu'en la suivant, dans un sens et dans l'autre, on s'écarte de plus en plus du point de départ et aussi du point qui s'éloigne à l'opposé, sans qu'il y ait d'autre modification dans cette distance croissante que celle de son augmentation ; c'est enfin, qu'une droite infinie n'est ni croissante, ni décroissante, qu'elle n'a ni commencement, ni fin, qu'elle est éternelle en longueur, et que ce qui peut se dire d'un de ses points le peut aussi d'un autre, si éloigné qu'on le conçoive du premier ; et rien de plus(1). L'expérience et la raison ne laissent donc aucune place, sur une droite, pour y étaler *cette étendue idéale de la droite au-delà de l'infini*, qui sert de base indispensable à la géométrie non Euclidienne ; et, l'on peut dire que, dans ses principes aussi bien que dans ses conséquences, cette géométrie n'est pas réelle comme science de l'étendue.

Mais, si la géométrie nouvelle n'est pas réelle comme science de l'étendue, ne peut-on la regarder, du moins, comme un répertoire de systèmes d'équations compatibles entre elles et, par suite, susceptibles d'interprétation ? Avant Descartes, jusqu'en 1637, on rejetait comme

(1) Chap. IX.

fausses les solutions négatives d'un problème, traité par l'algèbre, et les positives seules étaient considérées comme vraies. Descartes, par une féconde conception, donna la règle d'interprétation de ces racines négatives. Jusqu'à Argand, en 1806, on rejetait comme n'ayant aucun sens les solutions imaginaires d'un problème, traduit par l'algèbre, les positives et les négatives étant seules considérées comme vraies : aujourd'hui, le calcul directif fait connaître la loi générale de l'interprétation des quantités imaginaires (1). Un sort pareil et prochain est-il réservé aux découvertes algébriques de la géométrie non Euclidienne? Cela paraît peu probable ; en effet, les règles de Descartes et Argand, même étendues aux fonctions transcendantes, n'ont d'utilité et de sens, que dans les cas où l'hypothèse qu'on a faite, si elle était retournée ou détournée, conduirait à un problème ayant une solution réelle ; mais, si l'on retourne l'hypothèse du postulatum non Euclidien, on retombe dans le postulatum Euclidien, ou dans une géométrie aussi imaginaire que la première (2), ce qui constitue une sorte de démonstration par l'absurde du principe Euclidien. Il reste donc, peu de chances à la géométrie nouvelle de se réhabiliter, dans l'espace, par une heureuse interprétation.

Chose bizarre! Les adeptes de la nouvelle école rejettent tout d'abord, dans une partie de leur hypothèse fondamentale, le contrôle des sens sur l'imagination, et ils proposent ensuite de s'en rapporter à l'expérience,

(1) Voyez J. Hoüel, *Théorie élémentaire des quantités complexes* 1867. — Voy. Max. Marie, *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, 1874.

(2) Carton, *Vrais princ. de la Géom. Euclid.*, Avant-Propos.

pour décider de la solidité de cette hypothèse. « Il n'existe « pas, dit Lobatcheffsky, d'autre moyen que les obser- « vations astronomiques, pour s'assurer de l'exactitude « des calculs auxquels conduit la géométrie ordinaire. « Cette exactitude s'étend très-loin, comme je l'ai fait « voir dans un de mes *Mémoires*. Ainsi, dans les trian- « gles qui sont accessibles à nos moyens de mesure, on « n'a pas encore trouvé que la somme des trois angles « différât d'un centième de seconde de deux angles droits (1). » Il lui faut avoir une forte dose de présomption ou de naïveté pour espérer que l'expérience, qu'il a foulée aux pieds au début de ses spéculations, pourra lui venir en aide directe à la fin !

Mais, il y a plus d'une contradiction dans cette doctrine. C'est évidemment la présence de l'infini qui gêne les philosophes géomètres, dans le postulatum d'Euclide, de cet infini qui se produit, entre deux parallèles, d'une manière si claire, si uniforme, si constante, et si désespérante pour la raison de l'homme. Les mêmes géomètres pourtant n'hésitent pas à substituer à cette vue simple de l'infini, la perspective obscure d'un autre infini, qui est multiple, et qui aboutit lui-même à un second infini, situé au-delà de l'infini ordinaire. Ne vous semble t-il pas, à travers ces contradictions, qu'ils aient à cœur de trouver une géométrie plus complète et plus divine que celle de Descartes ? Un des leurs a nommé déjà cette future géométrie, comme pour en marquer l'ambitieuse portée, du nom de *géométrie astrale* (2). Tout se tient et

(1) *Etudes géométriques*, p. 34.

(2) Schweikardt, professeur à Kœnigsberg, d'après une lettre de Gauss à Schumacher.

tout s'enchaîne, dans la marche de l'esprit humain, et ces aspirations des géomètres étrangers ne sont pas insignifiantes; elles accusent et fortifient la tendance fâcheuse de la philosophie allemande, qui rayonne jusque chez nous, à diviniser la nature créée. A force de nier l'ordre supérieur et infini, à force de vouloir le trouver réalisé dans notre monde passager, imparfait et limité, on est amené à affirmer l'arrangement logique de ses propres idées, comme étant celui des choses mêmes, on invente l'ordre factice d'un système imaginaire, et on le substitue à l'ordre naturel du monde réel. Puissent les géomètres français, dont la raison gouverne encore l'imagination, résister à ce fatal entraînement de l'orgueil humain !

FIN DES DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES.

TABLE DES MATIÈRES

Lyon.— Imp. du Salut Public.— Bellon, r. de Lyon, 33.